

参加型不可能立体遊具の設計と実装

Design and Implementation of Participatory Impossible Objects

杉原 厚吉 (Kokichi Sugihara)¹

¹ 明治大学 (Meiji University)

e-mail : kokichis@meiji.ac.jp

1 概要

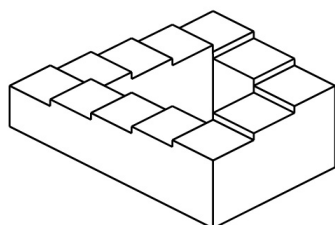
見るだけでなく参加して楽しむことのできる錯視遊具の二つの実装例について紹介する。その一つは歩ける無限ループ階段である。通常の立体化ではギャップができて歩けなくなるが、ギャップを小さくしながら傾斜も小さくするという折衷案で実装した。二つ目は雪の反重力滑り台である。ありふれた斜面に見えるが、そりで滑ると重力に逆らった動きが見えてくる。これらを通して、不可能立体錯視の大型遊具や観光資源としての可能性を論じる。

2 歩ける無限ループ階段

ペンローズ父子が提案した登り続けると元に戻ってしまう無限ループ階段は、不可能図形の代表例で、エッシャーが版画の中で素材に用いたことでも有名である。図 1(a) にその例を示す。これを実際に歩ける立体として実現する方法を考える [2]。不可能図形を立体化する方法の一つは、つながっているように見えるところを不連続に作る方法であるが、これでは階段のステップが離れるために歩くことが難しい。もうひとつの方法は、直角に見えるところに直角以外の角度を使う方法であるが、これで作るとステップが斜めになってやはり歩くことが難しくなる。そこで、これら二つの方法の折衷案を採用した。すなわち、不連続な構造を設けたところは少なくとも 1 点でつながり、その条件のもとでステップの最大傾斜を最小化した。

無限ループ階段は、真っすぐにつながった階段構造が四つ組み合わせられている。視点に近いところで形をゆがめると目立つので、手前の二つの階段構造は歪みなく作り、奥の二つの階段構造を変形させることによってつながった構造を作るという方針を採用した。見かけの形を変えないで立体を変形するためには、視点から出発しそれぞれの頂点を通る半直線の上でその頂点を動かせばよい。ただし、階段のステップや壁は平面であるという制約があるので、その制約を満たす範囲で頂点を動かす。

実現例を図 1(b), (c) に示す。(b) は、不可能図形と同じに見える視点から撮影したもので、(c) はその立体を一般の視点位置から撮影したものである。奥の階段構造は斜めになっているが、各ステップは少なくとも 1 点で繋がり、階段の傾斜もそれほど大きくないことがわかる。



(a) 不可能図形



(b) 立体化



(c) 別の視点から見たところ

図 1. 歩ける無限ループ階段 (2025 年 6 月、東京都千代田区丸の内 丸ビル 1 階)

3 雪の反重力滑り台

図 2(a) は、正六角形の穴の中央の一番低いところから、周りへ二つの斜面と一つの階段が伸びている立体の絵である。あり得る立体の正しい絵である。この絵と同じに見えるけれど、中央が最も高く斜面が外へ向かって降りている構造を作りたい。この場合も、立体の各頂点は、視点からその頂点へ伸ばした半直線の上で動かすことによって、立体を変形すればよい [1]。

これを雪で作った例を図 2(b), (c) に示した。(b) は絵と同じに見える視点から撮影したもので、(c) は別の方向から撮影したものである。穴を表す正六角形は 1 辺が 8m の大きさと、実際には地面の高さに描かれた絵である。中央は地面から 1m の高さに作った。この斜面をそりで滑るところを近くの高台から眺めると、重力に逆らってそりが斜面を登るように知覚される。すなわち、形だけを見るとありふれた姿であるが、そこに加えた動きが不可能に見える。無限ループ階段の場合は、その上を歩くことによって不可能性が強調されたのに対して、このすべり台の場合は、動きが加わることによってはじめて不可能な立体であるという印象が生まれる。



(a) 正常なすべり台の図

(b) 雪の反重力滑り台

(c) 別の視点から見たところ

図 2. 反重力滑り台の雪による実装 (2025 年 3 月、新潟県南魚沼市八海山麓スキー場)

4 おわりに

一般の不可能立体は、見ることによって錯視を体験することができるものであった。一方、本稿で紹介した立体では、人が参加することによって、不可能な構造の不可能性が強調されたり、あるいは不可能には見えなかったものが不可能に見えてくる。この意味で、不可能立体を参加型遊具として実装したものである。この実装法を応用して、アミューズメントパーク遊具や観光資源としての活用法をさらに開拓していきたい。

謝辞 歩ける無限ループ階段の実装は、株式会社フォーシーズン中田亨氏、株式会社チクバ装飾社須賀保男氏に受け持っていただいた。雪の反重力滑り台の実装は、池田記念美術館館長高橋良一氏、八海山麓グリーンクラブ会長岡村昇氏および南魚沼市のボランティアの方に協力いただいた。本研究は、JSPS 科研費 JP21H03530、21K19801、24K22325 の助成を受けている。立体の設計計算には、文部科学省共同利用・共同研究拠点である明治大学「現象数理学」拠点の共同利用計算機を利用した。

参考文献

- [1] K. Sugihara, Design of solids for antigravity motion illusion. *Computational Geometry: Theory and applications*, vol. 47 (2014), pp. 675–682.
- [2] 杉原厚吉, 歩けることを目指した無限ループ階段の設計法. 図学研究, 第 56 巻 1 号 (2022), pp. 13–23.

有限フレネル変換による直交関数系

Orthogonal Functional Systems for Finte Fresnel Transform

青柳 智裕 (Tomohiro Aoyagi)¹, 大坪 紘一 (Kouichi Ohtsubo)¹

¹ 東洋大学総合情報学部 (Toyo University)

e-mail : t-aoyagi@toyo.jp

1 概要

光学系における基本的な回折変換はレーリー回折であるが、実際にはその近似回折変換としてフレネル回折が用いられる。フレネル変換は、幾何学的にはフレネル回折場における 1 パラメータ変換群として定義でき、解析的にはヒルベルト空間上のユニタリーな有界線形作用として定義される [1-3]。代数的性質としては、フレネル変換作用素が群論的性質を持つことが証明されている [1]。フーリエ変換対に対する標準化関数系は、ヒルベルト空間上で完全正規直交系となり、そこで級数展開された関数は L^2 -ノルムに関して平均収束することが証明できる。その関数解析的な性質を用いて、信号処理、光情報処理などで応用されている。

しかし、フレネル変換領域における帯域制限の効果は十分に明らかにされていない。これまでヒルベルト空間においてフレネル変換対に対して帯域制限された関数のノルムを最大化することによる変分問題から積分方程式を導き、その関数系の性質と計算法について調べてきた [4,5]。本研究では、フレネル変換領域における帯域制限の効果を検討し、それによって導出される新しい関数系の性質と計算法ならびに応用について考察する。

2 フレネル変換

振幅透過率 $f(\xi, \eta)$ を持つ平面物体に光が入射したとき、そこから距離 z だけ後方にある観測面での光の振幅分布を $g(x, y; z)$ とする。フレネル近似のもとで $g(x, y; z)$ は次のように表される。

$$g(x, y; z) = \frac{k \exp(ikz)}{i2\pi z} \iint_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) \exp \left[\frac{ik}{2z} \{ (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 \} \right] d\xi d\eta. \quad (1)$$

ここで、 k は光の波数、 $i = \sqrt{-1}$ とする。また、フレネル逆変換は式 (1) において $f(\cdot, \cdot)$ と $g(\cdot, \cdot)$ を入れえ、 k を $-k$ と置いたものになる。図 1.(a) に簡単な光学系における座標系を示した。

3 帯域制限関数

いま $f(\xi, \eta)$ が矩形領域 R 内でのみ零以外の値をとるとすると、2 重フーリエ級数に展開することによって、その展開係数とフレネル変換との関係から次のように表現することができる。

$$\begin{aligned} g(x, y; z) &= \frac{1}{XY} \exp \left\{ \frac{ik}{2z} (x^2 + y^2) \right\} \\ &\times \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g \left(\frac{2\pi mz}{kX}, \frac{2\pi nz}{kY}; z \right) \exp \left[-\frac{ik}{2z} \left\{ \left(\frac{2\pi mz}{kX} \right)^2 + \left(\frac{2\pi nz}{kY} \right)^2 \right\} \right] \\ &\times \iint_R C_R(\xi, \eta) \exp \left\{ \frac{ik}{z} \left(\frac{2\pi m\xi z}{kX} + \frac{2\pi n\eta z}{kY} - x\xi - y\eta \right) \right\} d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 $C_R(\xi, \eta)$ は特性関数で、 $(\xi, \eta) \in R$ のとき 1 で $(\xi, \eta) \notin R$ のとき 0 となる。

定義 1 式 (2) を基にして、標準化関数系 $\{S_{m,n}(x, y; z)\}_{m,n=-\infty}^{\infty}$ を次のように定義する。

$$S_{m,n}(x, y; z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{XY} \exp \left[\frac{ik}{2z} \left\{ (x^2 + y^2) - \left(\frac{2\pi mz}{kX} \right)^2 - \left(\frac{2\pi nz}{kY} \right)^2 \right\} \right] \\ \times \iint_R C_R(\xi, \eta) \exp \left\{ i \left(\frac{2\pi m\xi}{X} + \frac{2\pi n\eta}{Y} - \frac{kx\xi}{z} - \frac{ky\eta}{z} \right) \right\} d\xi d\eta, \quad m, n \in \mathbb{Z}. \quad (3)$$

定理 2 フレネル変換対において光の振幅分布 $f(\xi, \eta)$ が、矩形領域 R 内のみで、零以外の値を取るとすると、振幅透過率 $g(x, y; z)$ は、その離散的な標本値列 $\{g(\frac{2\pi mz}{kX}, \frac{2\pi nz}{kY}; z)\}$ が分かれば、標準化関数系 $\{S_{m,n}(x, y; z)\}$ を用いることによって式 (2) で示すように一意的に表現できる。

定理 3 標準化関数系 $\{S_{m,n}(x, y; z)\}_{m,n=-\infty}^{\infty}$ は、完全直交関数系 (Complete Orthogonal System) である。

矩形領域 R を $\xi \in [-a, a], \eta \in [-b, b]$ と有界閉領域に制限すると、標準化関数系は次のようになる。

$$S_{m,n}(x, y; z) = \exp \left\{ \frac{ik}{2z} (x^2 + y^2) - \frac{i\pi^2 m^2 z}{2ka^2} - \frac{i\pi^2 n^2 z}{2kb^2} \right\} \\ \times \frac{1}{\left(m\pi - \frac{kxa}{z}\right)} \sin \left(m\pi - \frac{kxa}{z} \right) \frac{1}{\left(n\pi - \frac{kxb}{z}\right)} \sin \left(n\pi - \frac{kxb}{z} \right). \quad (4)$$

図 1.(b) は、式 (4) において $y = 0$ において $x \in [-3, 3]$ を 100 点で等間隔に標本化して表示したものである。各種パラメータは固定した。詳細については、当日発表する。

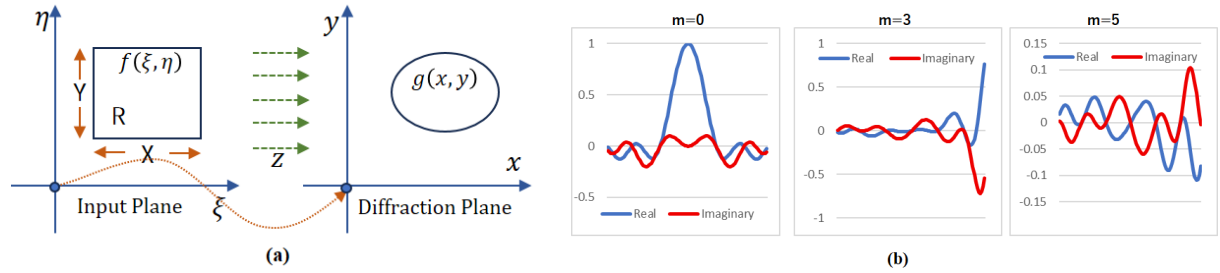


図 1. (a)Sketch of the important planes and their corresponding coordinate systems. (b)Plots of the discrete version of the orthogonal functional systems. Each element is a vector in \mathbb{C}^{100} .

参考文献

- [1] N. Aoyagi, Dr.Thesis, Tokyo Institute of Technology, Tokyo (1973).
- [2] J. B. Conway, A Course in Functional Analysis, 2nded. Springer, (2007).
- [3] J. W. Goodman, Introduction to Fourier Optics, 3rded. Roberts & Company Publishers, (2005).
- [4] T. Aoyagi, K. Ohtsubo, N. Aoyagi, Fredholm integral equation for finite Fresnel transform, 6th International Conference on Photonics, Optics and Laser Technology, Proceeding of Photoptics 2018, (2018), 286-291.
- [5] T. Aoyagi, K. Ohtsubo, Band-limited orthogonal functional systems for finite Fresnel transform, 8th International Conference on Optics, Photonics and Lasers (OPAL' 2025).

規則的な long edge を追加した格子模型における量子探索の探索時間の解析的な評価

Analytical Evaluation of Quantum search Runtime on Lattice Models with Regularly Added Long Edges

渡邊 聡 (Satoshi Watanabe)¹, 井手 勇介 (Yusuke Ide)², 今野 紀雄 (Norio Konno)²,
齋藤 溪 (Kei Saito)², 齊藤 和広 (Kazuhiro saito)¹
¹KDDI 総合研究所 (KDDI Research, Inc.), ² 日本大学 (Nihon University)
e-mail : xsas-watanabe@kddi.com

1 概要

quantum walk は頂点グラフの目標点 (marked points) を探索する際に用いられる。本研究では 1 次元及び 2 次元の周期境界条件を課した格子において規則的な long edge を追加した場合を考える。まずは目標点を反転しない時間発展作用素 U の固有値及び固有ベクトルを求め、目標点を反転する時間発展作用素 U' の作用から探索時間を評価する。

2 導入

Hanoi network 型 (HN 型) の long edges を持った 1,2 次元格子の上の quantum walk による頂点探索は [1, 2] においてなされた。Lackadaisical を用いた場合に 2 次元においては long edge を付け加えない場合はデータ数 N に対して $\mathcal{O}(\sqrt{N \log N})$ の run time で頂点探索がなされるのに対し、long edge を付け加えた場合はデータ数 N に対して $\mathcal{O}(\sqrt{N})$ の run time で頂点探索がなされることがわかる。但しこれらは数値的な結果に留まっている。これは HN 型の long edges が並進対称性を壊してしまうため固有ベクトルの構成などが難しいためである。

本研究においては規則的な long edge を付け加えた格子において [3, 4] の手法を用いて量子ウォークの時間発展作用素の固有ベクトルを構成して探索時間の評価を行う。1 次元の周期境界条件を課した格子において、距離 m の long edge を右向きと左向きに加えたもの考える。総頂点数は $N = mL$ とする。コインの空間を $\mathcal{H}_C = \text{span}\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ 、頂点の空間を $\mathcal{H}_G = \text{span}\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, \dots, |N-1\rangle\}$ とする。short edge の右向き左向きを $|0\rangle, |1\rangle$ 、long edge の右向き左向きを $|2\rangle, |3\rangle$ で表す。量子探索を考える空間は $\mathcal{H}_G = \mathcal{H}_C \otimes \mathcal{H}_V$ で目標点を $|0\rangle$ とする。 $|D_c\rangle = \frac{1}{2} \sum_{d=0}^3 |d\rangle$, $|D_p\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} |x\rangle$ として $U_G = 2|D_c\rangle\langle D_c| - \mathbb{I}_4$ とする。時間発展作用素を $U = S(U_G \otimes \mathbb{I}_N)$ とする。ここで S は flip-flop 型シフト作用素とする。

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{d=0}^3 \sum_{x=0}^{N-1} \psi_{d,x}(t) |d\rangle |x\rangle \quad (1)$$

として $U|\Psi(t)\rangle = |\Psi(t+1)\rangle$ を頂点成分ごとに書くと

$$\Psi(t+1)(x) = U_1^{(f)} \Psi(t)(x+1) + U_2^{(f)} \Psi(t)(x-1) + U_3^{(f)} \Psi(t)(x+m) + U_4^{(f)} \Psi(t)(x-m), \quad (2)$$

波数空間への Fourier 変換を $|\tilde{k}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} \omega^{kx} |x\rangle$, $\tilde{\Psi}(t)(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} \omega^{kx} \Psi(t)(x)$, ($\omega = e^{2\pi i/N}$) とする。波数空間に移ると時間発展は $\tilde{\Psi}(t+1)(k) = U_f(k) \tilde{\Psi}(t)(k)$ で

$$U_f(k) = \begin{bmatrix} 0 & \omega^k & 0 & 0 \\ \omega^{-k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^{mk} \\ 0 & 0 & \omega^{-mk} & 0 \end{bmatrix} U \quad (3)$$

で各波数ごとの行列を対角化すると U を対角化することができる。

3 結果

各波数空間ごとに固有空間分解をすることによって,

$$\mathcal{H}'_0 = \text{span}\{|\nu_0^{1a}, \tilde{0}\rangle, |\nu_k^{\pm\theta}, \tilde{k}\rangle \ (k = 1, \dots, N-1)\} \quad (4)$$

$$\mathcal{H}'_1 = \text{span}\{|\nu_0^{1b}, \tilde{0}\rangle, |\nu_0^{1c}, \tilde{0}\rangle, |\nu_0^{-1}, \tilde{0}\rangle, |\nu_k^{\pm 1}, \tilde{k}\rangle \ (k = 1, \dots, N-1)\} \quad (5)$$

と $\mathcal{H}_G = \mathcal{H}_C \otimes \mathcal{H}_V$ を U の固有ベクトルで固有空間分解することができる。ここで $|0\rangle$ を探索するために U に摂動を加え $U' = U(\mathbb{I}_{4N} - 2|D_c, 0\rangle\langle D_c, 0|)$ として $U'|\Psi(t)\rangle = |\Psi(t+1)\rangle$ で目標点の観測確率を増幅することを考える。ここで成功確率は $p(t) = |\langle D_c, 0|\Psi(t)\rangle|^2$ とする。このとき初期状態 $|\Psi(0)\rangle = |D_c, D_p\rangle \in \mathcal{H}'_0$ がわかりさらに $U'(\mathcal{H}'_0) = \mathcal{H}'_0$ がわかるので量子探索の時間発展は \mathcal{H}'_0 の中での変換で記述されることがわかる。ここで \mathcal{H}'_0 のなかで U' の固有値の実部がもっとも 1 に近い 2 つのベクトル $|w_\alpha\rangle, |w_{-\alpha}\rangle$ を取る。(固有値は $e^{\pm i\alpha}$)

ある $t = \beta$ を取ると $|w_{start}\rangle = |w_\alpha\rangle - |w_{-\alpha}\rangle$ として $|\langle D_c, 0|(U')^\beta |w_{start}\rangle|^2 \approx 1$ ($N \rightarrow \infty$) となることを示すことができる。ここで $\beta = \mathcal{O}(N)$ であることも分かり N のオーダーで目標点を探索することができる。これは HN 版の long edge と同程度の高速化が得られていることがわかる。2次元格子に規則的な long edge を追加した場合も 1次元の場合と同様にまず頂点の空間の並進対称性を利用するために波数の空間に Fourier 変換することで U の固有ベクトルを構成する。次に量子探索を考えるために U に摂動を加えた U' を考える。この U' を作用させたときの不変な部分空間を用いて特殊な固有ベクトルを議論することで、量子探索の探索時間の漸近的な挙動を解析的に評価することができる。

参考文献

- [1] P.R.Giri and V.E.Korepin, Quantum search on Hanoi network, International Journal of Quantum Information, Vol. 17, No. 07,1950060 (2019).
- [2] P.R.Giri, Quantum Walk Search on a Two-dimensional Grid with Extra Edges, International Journal of Theoretical Physics, Volume 62, article number 121, (2023).
- [3] A.Ambainis, J.Kempe and A.Rivosh, Proceedings 16th Annual ACM-SIAM Symposium Discrete Algorithms, SODA 05, 1099-1108. SIAM, Philadelphia, PA (2005).
- [4] R.Portugal, *Quantum Walks and Search Algorithms*, Springer, New York (2013).

3つの行列による Bottcher-Wenzel 不等式の一般化について

A generalization of the Bottcher-Wenzel inequality for three matrices

昇 幹征 (NOBORI Motoyuki)¹

¹ 愛媛大学大学院 理工学研究科 理工学専攻 博士後期 2 年

e-mail : m819002c@mails.cc.ehime-u.ac.jp

1 概要

m, n を正の整数とする. Bottcher-Wenzel 不等式とは, 二つの n 次正方行列 A, B による Commutator $AB - BA$ の Frobenius norm に関する次の不等式である:

定理 1 ([1], Bottcher-Wenzel 不等式). 任意の n 次正方行列 A, B に対して,

$$\|AB - BA\|_F^2 \leq 2\|A\|_F^2\|B\|_F^2 \quad (1)$$

が成り立つ.

2005 年にこの不等式に関する予想が発表され [2], 2008 年に n 次実数値正方行列の場合における証明が発表された [3]. それ以降, 複素数値正方行列の場合や, 何通りの別証明が発表された (cf. [1, 4]). また, 次の主張にある通り, この不等式の左辺は更に小さくすることが可能である:

定理 2 ([4]). 任意の n 次正方行列 A, B に対して,

$$\|AB - BA\|_F^2 \leq 2\|A\|_{(2),2}^2\|B\|_F^2 \quad (2)$$

が成り立つ. ここで, $\|A\|_{(2),2}^2 = \sigma_1^2(A) + \sigma_2^2(A)$ は, A の *Ky-Fan (2,2)-norm* と呼ばれるものである. また, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ に対して, $\sigma_i(A)$ は, A の i 番目に大きい特異値である.

2020 年以降, Bottcher-Wenzel 不等式を一般化する試みも行われている. 例えば, Commutator を一般化したり [5], Frobenius Norm を一般化したり [6] したときの, norm の不等式に関する結果が発表されている. 本研究では, 文献 [7] にならって, 二つの $m \times n$ 次行列 A, C 及び一つの $n \times m$ 字行列 B の積と差による Generalized Commutator $ABC - CBA$ を定義し, その Frobenius norm の上限を解析した. そして次の結果を得た:

定理 3 ([8], Theorem 1.1). 任意の $m \times n$ 次行列 A, C , $n \times m$ 次行列 B に対して,

$$\|ABC - CBA\|_F^2 \leq 2\|C\|_2^2\|A\|_2^2\|B\|_F^2 \quad (3)$$

が成り立つ. ただし, $\|C\|_2^2 = \sigma_1^2(C)$ は C の *Spectral norm* である.

不等式 (3) は (2) の一般化となっている. なぜなら, $n = m$ かつ C が n 次単位行列 I_n の時, $\|C\|_2 = 1$ かつ $ABC - CBA = AB - BA$ となり, (3) の両辺は (2) の両辺と一致するためである.

本講演では, 定理 3 の証明の概略及び, 現在講演者が考察している新たな一般化の方向性について紹介する.

参考文献

- [1] A. Böttcher, and D. Wenzel, The Frobenius norm and the commutator, Linear Algebra and its Applications, 429. (2008), 1864–1885.

- [2] A. Böttcher, and D. Wenzel, How big can the commutator of two matrices be and how big is it typically?, *Linear Algebra and its Applications*, 403. (2005), 216–228.
- [3] S.-W. Vong and X.-Q. Jin, Proof of Böttcher and Wenzel’ s conjecture, *Oper. Matrices*, 2. (2008), 435–442
- [4] K.M. Audenaert, Variance bounds, with an application to norm bounds for commutators, *Linear Algebra and its Applications*, 432. (2010), 1126–1143.
- [5] D. Chruściński, G. Kimura, H. Ohno, and T. Singal, One-parameter generalization of the Böttcher-Wenzel inequality and its application to open quantum dynamics, *Linear Algebra and its Applications*, 656. (2023), 158–166.
- [6] A. Mayumi, K. Gen, H. Ohno, and D. Chruściński, Böttcher-Wenzel inequality for weighted Frobenius norms and its application to quantum physics, *Linear Algebra and its Applications*, 700. (2024), 35–49
- [7] L. László, A norm inequality for three matrices, *The Electronic Journal of Linear Algebra*, 38. (2022), 221–226.
- [8] M. Nobori, A generalization of the Böttcher-Wenzel inequality for three rectangular matrices, *Linear Algebra and its Applications*, to appear:
<https://doi.org/10.48550/arXiv.2506.17365>