マルチリーダー・フォロワーゲームに対する正則化最適値関数を用いたペナルティ法

A Penalty Method with a Regularized Value Function for Multi-Leader–Follower Games

堀 篤史 (Atsushi Hori)[1], 奥野 貴之 (Takayuki Okuno)[2], 福田 エレン 秀美 (Ellen H. Fukuda)[3]
[1] 名古屋工業大学 大学院工学研究科 (Nagoya Institute of Technology)
[2] 成蹊大学 理工学部 (Seikei University), [3] 京都大学 大学院情報学研究科 (Kyoto University)
e-mail : hori@nitech.ac.jp

1　概要

マルチリーダー・フォロワーゲーム（MLFG）は複数の先手と後手から成る階層型の非協力ゲームである．MLFG は MPEC（均衡制約をもつ数理計画問題）に基づくアルゴリズムが広くに研究されてきた．これに対して MLFG の特殊な場合である 2 レベル最適化では MPEC ではなく，最適値関数を用いたアルゴリズムが近年活発に研究されている．最適値関数を用いることでフォロワーの最適化問題について，必要な微分情報の次数が従来手法と比べて下がることから，効率的な最適化手法の構築につながる．

本研究では，MLFG に対して正則化を施した最適値関数とペナルティ法を用いてリーダー間（単一階層）の非協力ゲームに近似する手法を提案し，原問題との関係を解析する．また，2 レベル最適化のクラスでも考慮されていないフォロワーの最適化問題が（強）凸でない場合の統一的な枠組みでの取り扱いを提案している．

2　マルチリーダー・フォロワーゲームの再定式化

本稿では簡単のため，2 リーダー・1 フォロワーゲームを考える．リーダー $\nu \in \{1,2\}$ は $x^\nu \in \mathbb{R}^{n_\nu}$ を戦略，$X^\nu \subset \mathbb{R}^{n_\nu}$ を戦略空間，$\theta^\nu \colon \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$（$n := n_1 + n_2$）をコスト関数とし，以下の最適化問題を解くものとする：

$$\min_{x^\nu \in \mathbb{R}^{n_\nu}} \quad \theta^\nu(x^\nu, x^{-\nu}, y) \qquad \text{s.t.} \quad x^\nu \in X^\nu \tag{1}$$

ここで $x^{-\nu}$ は相手リーダーの戦略を表す．フォロワーは $x := (x^1, x^2) \in X^1 \times X^2$ を所与とし，$y \in \mathbb{R}^m$ を戦略，$Y \subset \mathbb{R}^m$ を戦略空間，$\gamma \colon \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ をコスト関数とし，以下の問題を解く：

$$\min_{y \in \mathbb{R}^m} \quad \gamma(x, y) \qquad \text{s.t.} \quad y \in Y \tag{2}$$

ここでフォロワーの問題 (2) における最適解集合を $S(x)$ とすると，$S(x) = \{y \in Y \mid h(x,y) := \gamma(x,y) - \phi(x) \leq 0\}$ と表せる．ただし，$\phi(x) := \min_{z \in Y} \gamma(x,z)$ とする．

2 レベル最適化（1 リーダー・1 フォロワーゲーム）の先行研究 [1] では，勾配法を適用できるように，$\gamma(x,\cdot)$ に強凸性を仮定することで，$h(x,y)$ を微分可能にしているが，現実の問題は必ずしもこの仮定が成り立つとは限らない．そこで本研究ではこの仮定を緩めながらも各リーダーの最適化問題が微分可能となるような最適値関数を用いた再定式化アプローチを提案する．

仮定 1　1)　X^ν（$\nu = 1,2$）は非空コンパクト

2)　Y は非空コンパクト

3)　θ^ν（$\nu = 1, 2$）は L_ν-平滑かつ劣解析的（subanalytic, [2] を参照）

4)　γ は ℓ-平滑かつ劣解析的

ここで，最適値関数 $\phi(x)$ に以下のような正則化を施す．

$$\phi_\mu(x, y) := \min_{z \in Y} \gamma(x, z) + \frac{1}{2\mu}\|y - z\|^2,\ h_\mu(x, y) := \gamma(x, y) - \phi_\mu(x, y)\ (\mu > 0)$$

定理 2　仮定 1 が成り立つとする．このとき，以下のことが成り立つ：

1)　任意の $x \in X$，$y \in Y$ に対して，$h_\mu(x, y) \geq 0$．さらに，$y^* \in S(x) \iff h_\mu(x, y^*) = 0$ なる $y^* \in Y$ が存在する

2)　$\mu < \ell^{-1}$ のとき，h_μ は微分可能

定理 2 より $S(x) = \{y \in Y \mid h_\mu(x, y) \leq 0\}$ としても良いことがわかる．

条件 $y \in S(x)$ を各リーダーの問題 (1) の制約条件に取り込むことで，以下の最適化問題となり，MLFG は微分可能なリーダー間の非協力ゲーム（一般化ナッシュ均衡問題）に再定式化できる．

$$\min_{x^\nu, y^\nu} \theta^\nu(x^\nu, x^{-\nu}, y^\nu) \quad \text{s.t.} \quad w^\nu := (x^\nu, y^\nu) \in W^\nu := X^\nu \times Y,\ h_\mu(x^\nu, x^{-\nu}, y^\nu) \leq 0 \tag{3}$$

ここで，フォロワーの戦略ベクトル y^ν はリーダーによって一般に異なるので，ν によって区別をしていることに注意する．また，以後 $w^\nu := (x^\nu, y^\nu)$ とし，$\theta^\nu(x^\nu, x^{-\nu}, y^\nu) \equiv \theta^\nu(w^\nu, x^{-\nu})$ などと表記する．この単一階層の非協力ゲームのナッシュ均衡（**LF ナッシュ均衡**と呼ぶ）を求めることで原問題の均衡解が得られる．しかし，制約式 $h_\mu(x, y) \leq 0$ は標準的な制約想定が成り立たないゆえに，この非協力ゲームを標準的なアルゴリズムで解くことは難しい．そこで，任意の $(x, y) \in X \times Y$ に対して，$h_\mu(x, y) \geq 0$ という性質を利用して，この制約条件をペナルティ化した以下の最適化問題を提案する：

$$(\mathrm{P}^\nu_\rho(x^{-\nu})) \qquad \min_{w^\nu} \quad \theta^\nu(w^\nu, x^{-\nu}) + \rho h_\mu(w^\nu, x^{-\nu}) \qquad \text{s.t.} \quad w^\nu \in W^\nu$$

本研究の主要な成果として，リーダー間の非協力ゲームの近似均衡解の列について，近似精度を高めながらペナルティパラメータを大きくすると，LF ナッシュ均衡に収束することを証明した．

定理 3　仮定 1 が成り立つとする．また，すべての ν について，点 $w^{k,\nu} := (x^{k,\nu}, y^{k,\nu})$ が問題 $(\mathrm{P}^\nu_{\rho_k}(x^{k,-\nu}))$ に対する ε_k-近似最適解とする．このとき，$\varepsilon_k \to 0$ かつ $\rho_k \to +\infty$（$k \to \infty$）とすると，$(w^{k,1}, w^{k,2})$ は LF ナッシュ均衡に収束する．

参考文献

[1] Z. Lu & S. Mei, First-order penalty methods for bilevel optimization, *SIAM J. Optim.*, 34 (2024), 1937–1969.

[2] J. Bolte, A. Daniilidis & A. Lewis, The Łojasiewicz inequality for nonsmooth subanalytic functions with applications to subgradient dynamical systems, *SIAM J. Optim.*, 17 (2007), 1205–1223.

[3] A. N. Iusem, T. Pennanen & B. F. Svaiter, Inexact variants of the proximal point algorithm without monotonicity, *SIAM J. Optim.*, 13 (2003), 1080–1097.

一般的な距離を用いた近接勾配法 ―global descent lemma からの解放―

Proximal gradient-type method with generalized distance –liberation from the global descent lemma–

柳下 翔太郎 (Shotaro Yagishita)[1,2], 伊藤 勝 (Masaru Ito)[3]
[1] 統計数理研究所 (The Institute of Statistical Mathematics),
[2] データサイエンス共同利用基盤施設 (Joint Support-Center for Data Science Research),
[3] 日本大学 (Nihon University)
e-mail : syagi@ism.ac.jp

1 講演の概要

本講演では，以下の非凸非平滑最適化問題の数値解法について議論する：

$$\underset{x\in\mathbb{E}}{\mathrm{minimize}} \quad F(x) \coloneqq f(x) + g(x). \tag{1}$$

ただし，$\mathbb{E}$ は有限次元内積空間，$f : \mathbb{E} \to (-\infty, \infty]$ は $\mathrm{dom}\, f$ の内部で連続的微分可能，$g : \mathbb{E} \to (-\infty, \infty]$ は下半連続であるとする．典型的には，微分不可能な g を想定している．このような最適化問題は，統計的推測，機械学習や信号処理などにおいて頻繁に用いられている．(1) のような微分不可能な項をもつ最適化問題に対するアルゴリズムの中で，最も頻繁に用いられるものは近接勾配法である．近接勾配法は $L_k > 0$ をステップサイズ（の逆数）として，

$$x^{k+1} \in \underset{x\in\mathbb{E}}{\mathrm{argmin}} \left\{ \underbrace{\langle \nabla f(x^k), x\rangle}_{f\text{ の 1 次近似}} + \underbrace{\frac{L_k}{2}\|x - x^k\|^2}_{\text{近接項}} + g(x) \right\}$$

のように点列を更新するアルゴリズムである．近接勾配法を用いる際には，この子問題が効率的に解けることを暗に仮定している．また，典型的には ∇f のリプシッツ連続性を仮定して収束性の解析が行われる．基本的には，その必要条件である，以下の上界補題が用いられる：

$$f(x) \le f(y) + \langle \nabla f(y), x - y\rangle + \frac{L}{2}\|x - y\|^2 \quad (\forall x, y).$$

∇f がリプシッツ連続でないとき，もしくは近接勾配法の子問題が効率的に解けないとき，Bregman 近接勾配法 [1] がしばしば用いられる．Bregman 近接勾配法は以下の更新を繰り返す：

$$x^{k+1} \in \underset{x}{\mathrm{argmin}} \left\{ \langle \nabla f(x^k), x\rangle + L_k D_h(x, x^k) + g(x) \right\}.$$

ただし，$D_h(x, y) \coloneqq h(x) - h(y) - \langle \nabla h(y), x - y\rangle$ は狭義凸関数 h によって定義される Bregman divergence である．$h(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$ を用いるとき，Bregman 近接勾配法は通常の近接勾配法に一致する．Bregman 近接勾配法に対しては，上界補題の一般化である，以下の相対的平滑性 [2, 1] を用いて収束解析が行われる：

$$f(x) \le f(y) + \langle \nabla f(y), x - y\rangle + L D_h(x, y) \quad (\forall x, y).$$

もちろん，Bregman 近接勾配法も子問題が効率的に解けなければならない．すなわち，典型的な収束解析法に頼る限り，近接勾配型アルゴリズムを効率的に実行するためには，与えられた最適化問題 (1) に対して以下の条件が満たされるように近接項を選択する必要がある．

(i) 相対的平滑性が成り立つ．

(ii) 子問題が効率的に解ける．

言い換えると，f と g それぞれと相性がよい近接項を選ばなければならないということである．しかしながら，それを満たすように近接項を選ぶことは必ずしも容易ではない．

本研究では，より一般の近接項を用いた近接勾配型アルゴリズムの収束性を，相対的平滑性のような大域的な仮定を置かずに与える．これは [3] における，通常の近接勾配法に対する勾配のリプシッツ性を仮定しない収束解析の一般化といえる．我々の解析の結果，f との相性を気にすることなく g との相性のみを考慮して近接項を選ぶことが可能になり，近接勾配型アルゴリズムを効率的に適用できる問題の範囲が広がる．実際，ロバスト回帰に現れるある最適化問題に対して，Bregman divergence でも ϕ-divergence でもない近接項を用いた効率的な近接勾配型アルゴリズムが適用できるようになる．本研究の副産物として，制約の内部に自動的に留まる勾配法である，内点勾配法 [4, 5, 6] の新たな収束性も与えられ，その適用範囲が大幅に拡大される．

本講演は，[7] に基づいている．

参考文献

[1] Jérôme Bolte, Shoham Sabach, Marc Teboulle, and Yakov Vaisbourd. First order methods beyond convexity and Lipschitz gradient continuity with applications to quadratic inverse problems. *SIAM Journal on Optimization*, 28(3):2131–2151, 2018.

[2] Haihao Lu, Robert M Freund, and Yurii Nesterov. Relatively smooth convex optimization by first-order methods, and applications. *SIAM Journal on Optimization*, 28(1):333–354, 2018.

[3] Christian Kanzow and Patrick Mehlitz. Convergence properties of monotone and non-monotone proximal gradient methods revisited. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 195(2):624–646, 2022.

[4] PPB Eggermont. Multiplicative iterative algorithms for convex programming. *Linear Algebra and its Applications*, 130:25–42, 1990.

[5] Alfredo N Iusem, BF Svaiter, and Marc Teboulle. Multiplicative interior gradient methods for minimization over the nonnegative orthant. *SIAM journal on control and optimization*, 34(1):389–406, 1996.

[6] Alfred Auslender and Marc Teboulle. Interior gradient and proximal methods for convex and conic optimization. *SIAM Journal on Optimization*, 16(3):697–725, 2006.

[7] Shotaro Yagishita and Masaru Ito. Proximal gradient-type method with generalized distance and convergence analysis without global descent lemma. *arXiv preprint arXiv:2505.00381*, 2025.

Banach 空間上の最適化問題に対する安定化逐次二次計画法の局所的二次収束性

Local and quadratic convergence of a stabilized SQP method for optimization problems in Banach spaces

山川 雄也 (Yuya Yamakawa)[1]
[1] 東京都立大学 (Tokyo Metropolitan University)
e-mail : yuya@tmu.ac.jp

1　概要

本講演では，以下の Banach 空間上の最適化問題を考える．

$$\begin{aligned} &\underset{x\in X}{\text{minimize}} && f(x) \\ &\text{subect to} && G(x) \in K \end{aligned} \tag{1}$$

ただし，X は Banach 空間，Y は Hilbert 空間，K は Y の非空な閉凸集合，$f\colon X \to \mathbb{R}$ および $G\colon X \to Y$ は二階連続的微分可能な関数とする．

問題 (1) は，さまざまなクラスの最適化問題を含むが，特に最適制御や形状最適化などの Banach 空間上の最適化問題を記述する際に適した形式である．問題 (1) のような広い範囲に適用可能な問題に対する最適化手法を提案し，その収束性を議論している論文については，例えば，Börgens [1], Kanzow [2], Yamakawa [3] などが挙げられるが，その数はそれほど多くはない．さらに言えば，逐次二次計画法に基づく手法（SQP 型手法）は，多くのソルバに採用されている主流な最適化手法であるが，問題 (1) のような Banach 空間上の最適化に関する研究に限ると，その数は限定的である．ここでは，特に安定化 SQP 法と呼ばれる SQP 型手法に対する局所的二次収束性について議論する．

以下では，本稿で用いる基本的な記号を定義する．まず，$\|\cdot\|_X$ は X 上のノルム，$\langle\cdot,\cdot\rangle_{X^*,X}$ は X とその双対空間 X^* の双対積，$(\cdot,\cdot)_Y$ は Y 上の内積を表す．集合 $V := X \times Y$ のノルムは，$\|v\|_V := \|x\|_X + \|y\|_Y$ $(v = (x, y))$ で定義する．集合 $\mathcal{T}_K(y)$ および $\mathcal{N}_K(y)$ は，それぞれ $y \in Y$ における K の接錐および法線錐を表す．集合 $S \subset Y$ の開核は，$\mathrm{int}(S)$ と表す．写像 $P_K\colon Y \to Y$ は，K 上への凸射影を表す．集合 $B_V(v, r)$ は，$v \in V$ を中心とした半径 r の閉球を表す．

2　最適性の必要条件および十分条件

以下では，$\bar{x} \in X$ は問題 (1) の局所的最適解であるとし，関数 $L\colon V \to \mathbb{R}$, $\sigma\colon V \to \mathbb{R}$ をそれぞれ $L(v) := f(x) + (\lambda, G(x))_Y$, $\sigma(v) := \|L_x(v)\|_{X^*} + \|G(x) - P_K(G(x) + \lambda)\|_Y$ $(v = (x, \lambda) \in V)$ と定義する．このとき，問題 (1) の最適性条件である Karush-Kuhn-Tucker（KKT）条件を定義する．

定義 1　$v = (x, \lambda) \in V$ が $L_x(v) = 0$ および $\lambda \in \mathcal{N}_K(G(x))$ を満たすとき，v は KKT 条件を満たすという．ただし，L_x は L の x に関する偏導関数である．

以下では，KKT 条件を満たす点のことを KKT 点と呼ぶ．続いて，収束解析において重要な役割を果たす Strict Robinson 制約想定（SRCQ）および最適性の二次の十分条件（SOSC）を定義する．

定義 2　$x \in X$ が $0 \in \mathrm{int}\,(G(x) + G'(x)X - K_0)$ を満たすとき，SRCQ が成り立つという．ただし，G' は G の x における導関数であり，$K_0 := \{y \in K; (\lambda, y - G(x))_Y = 0\}$ である．

定義 3 $v = (x, \lambda) \in V$ を KKT 点とする．このとき，ある $c > 0$ および $\eta > 0$ が存在して，任意の $d \in C_\eta(x)$ に対し，$\langle L_{xx}(v)d, d\rangle_{X^*,X} \geq c\|d\|_X^2$ が成り立つとき，v は SOSC を満たすという．ただし，$C_\eta(x) \coloneqq \{d \in X; \langle f'(x), d\rangle_{X^*,X} \leq \eta\|d\|_X, G'(x)d \in \mathcal{T}_K(G(x))\}$ である．

ここで，$\Lambda(\bar{x}) \coloneqq \{\lambda \in Y; (\bar{x}, \lambda)$ は KKT 点である $\}$ と定義する．このとき，$\bar{x}$ で SRCQ が成り立てば，$\Lambda(\bar{x})$ が単集合，つまり $\Lambda(\bar{x}) = \{\bar{\lambda}\}$ となる．以下では，$\bar{v} \coloneqq (\bar{x}, \bar{\lambda})$ とする．また，$\bar{v}$ で SOSC が成り立てば，$\bar{x}$ は狭義局所的最適解となる．SRCQ と SOSC は，$\sigma(v)$ が $\bar{v}$ とその近傍の v との距離に対する局所エラーバウンドを与えるための十分条件でもあり，収束解析で重要な役割を果たす．

3 安定化 SQP 法とその局所収束性

ここでは，まず安定化 SQP 法の概要を与える． 以下では，k 回目の反復点を (x_k, μ_k) とする．安定化 SQP 法では，毎回の反復において以下の部分問題を近似的に解くことで点列を更新する．

$$\begin{aligned} &\underset{(d,\mu)\in V}{\text{minimize}} && \langle f'(x_k), d\rangle_{X^*,X} + \frac{1}{2}\langle L_{xx}(\bar{v})d, d\rangle_{X^*,X} + \frac{\sigma(v_k)}{2}\|\mu\|_Y^2 \\ &\text{subect to} && G(x_k) + G'(\bar{x})d - \sigma(v_k)(\mu - \lambda_k) \in K \end{aligned} \tag{2}$$

問題 (2) は，一般には解を持つとは限らないが，$\bar{v}$ において SRCQ と SOSC が仮定されていれば，以下で述べるように近似的な局所的最適解の存在を保証することができる．

定理 4 $\bar{v}$ において SRCQ と SOSC が成り立ち，f と G は $\bar{v}$ の近傍で局所 Lipschitz 連続であるとする．このとき，ある $m > 0$ と $r > 0$ が存在し，任意の $v_k = (x_k, \lambda_k) \in B_V(\bar{v}, r)$ に対し，部分問題 (2) は近似的局所最適解 $w_k = (d_k, \mu_k)$ を持ち，$\|d_k\|_X + \|\mu_k - \lambda_k\|_Y \leq m\sigma(v_k)$ を満たす．

特に，定理 5 の後半の不等式は，収束解析で重要な役割を果たすことに注意されたい．部分問題 (2) の近似解 $w_k = (d_k, \mu_k)$ が得られれば，$x_{k+1} = x_k + d_k$，$\lambda_{k+1} = \mu_k$ により点列を更新する．以上をまとめると，提案する安定化 SQP 法および本研究の主要結果は以下のようになる．

安定化 SQP 法

Step 0: 初期点 $v_0 = (x_0, \lambda_0)$ を選び，$k \coloneqq 0$ とする．

Step 1: 問題 (2) の近似解 $w_k = (d_k, \mu_k)$ を求める．

Step 2: $x_{k+1} = x_k + d_k$，$\lambda_{k+1} = \mu_k$ により点列を更新し，$k \leftarrow k + 1$ として Step 1 へ戻る．

定理 5 $\bar{v}$ において SRCQ と SOSC が成り立ち，f と G は $\bar{v}$ の近傍で局所 Lipschitz 連続であるとする．このとき，初期点 v_0 を $\bar{v}$ の十分近くに選べば，$\{v_k\}$ は $\bar{v}$ へ二次収束する．

参考文献

[1] E. Börgens, C. Kanzow, and D. Steck, Local and global analysis of multiplier methods for constrained optimization in Banach spaces, SIAM J. Control Optim., Vol. 57 (2019), pp. 3694–3722.

[2] C. Kanzow and D. Steck, On error bounds and multiplier methods for variational problems in Banach spaces, SIAM J. Control Optim., Vol. 56 (2018), pp. 1716–1738.

[3] Y. Yamakawa, A stabilized sequential programming method for optimization problems in function spaces, Numer. Funct. Anal. Opt., Vol. 44 (2023), pp. 867–905.

非線形二次錐相補性問題に対する行列分割を用いた不動点アルゴリズム

A fixed-point algorithm with matrix splitting for nonlinear second-order cone complementarity problems

林 俊介 (Shunsuke Hayashi)[1], 武内 優樹 (Yuki Takeuchi)[1]
[1] 法政大学 (Hosei University)
e-mail : s_hayashi@hosei.ac.jp

1 はじめに

本稿では以下のような形で表される二次錐相補性問題 (Second-Order Cone Complementarity Problem: SOCCP) について考える: Find $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ such that

$$\boldsymbol{u} \in \mathcal{K},\ \boldsymbol{v} \in \mathcal{K},\ \boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{v} = 0,\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) \tag{1.1}$$

ここで $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ は所与の連続微分可能な関数であり，$\mathcal{K}$ は n_i 次元の二次錐 $\mathcal{K}^{n_i} = \{(z_1, \boldsymbol{z}_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n_i - 1} \ : \|\boldsymbol{z}_2\| \leq z_1\}$ を用いて $\mathcal{K} = \mathcal{K}^{n_1} \times \mathcal{K}^{n_2} \times \cdots \times \mathcal{K}^{n_q}$ と表される閉凸錐である．ここで，$\sum_{i=1}^q n_i = n$ および $\|\cdot\|$ はユークリッドノルムであり，$n_i = 1$ のときは $\mathcal{K}^1 = \{z \in \mathbb{R} : z \geq 0\}$ である．Ke ら [2] および Li ら [1] は線形な二次錐相補性問題をジョルダン代数に基づく絶対値関数を用いて不動点問題に再定式化し，それに対して行列分割法を適用するアプローチを提案した．しかし，彼らは $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) = A\boldsymbol{u} + \boldsymbol{b}$ すなわち $\boldsymbol{f}$ がアフィン関数である場合のみを対象としていた．そこで，本研究では既存の行列分割法を非線形な SOCCP に拡張するとともに，適当な条件の下で解に収束することを示す．

2 絶対値関数を用いた二次錐相補性条件の等価表現

$\mathcal{K} = \mathcal{K}^{n_1} \times \mathcal{K}^{n_2} \times \cdots \times \mathcal{K}^{n_p}$ のとき，任意のベクトル $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_q) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_q}$ に対して，ジョルダン代数に基づく絶対値関数を $\mathrm{abs}(\boldsymbol{x}) := \big(|\boldsymbol{x}_1|, \ldots, |\boldsymbol{x}_q|\big) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_q}$ で定義する．ここで，$\boldsymbol{z} = (z_1, \boldsymbol{z}_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n_j - 1}$ に対して $|\boldsymbol{z}| = |\lambda_1|\boldsymbol{w}_1 + |\lambda_2|\boldsymbol{w}_2$ および

$$\lambda_i = z_1 + (-1)^i \|\boldsymbol{z}_2\| \tag{2.1}$$

$$\boldsymbol{w}_i = \begin{cases} \frac{1}{2}(1, (-1)^i \frac{\boldsymbol{z}_2}{\|\boldsymbol{z}_2\|}) & \boldsymbol{z}_2 \neq \boldsymbol{0} \\ \frac{1}{2}(1, (-1)^i \tilde{\boldsymbol{w}}) & \boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{0} \end{cases} \tag{2.2}$$

である．ただし，$\tilde{\boldsymbol{w}}$ は $\|\tilde{\boldsymbol{w}}\| = 1$ であるような $n-1$ 次元の任意のベクトルである．さらに，正数 $\gamma_i, \sigma_i > 0$ および単位行列 $I_{n_i} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ を用いて $\Lambda_1 = \mathrm{Diag}\,(\gamma_1 I_{n_1}, \ldots, \gamma_q I_{n_q}), \Lambda_2 = \mathrm{Diag}\,(\sigma_1 I_{n_1}, \ldots, \sigma_q I_{n_q})$ とする．さらに，ベクトル $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ を

$$\boldsymbol{u} = \Lambda_1(\mathrm{abs}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{v} = \Lambda_2(\mathrm{abs}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}) \tag{2.3}$$

で定義すると，これらは二次錐相補性条件 $\boldsymbol{u} \in \mathcal{K}$, $\boldsymbol{v} \in \mathcal{K}$, $\boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{v} = 0$ を満たす．

3 行列分割を用いた不動点アルゴリズム

Ke ら [2] および Li ら [1] は $\boldsymbol{f}$ がアフィン関数であるときの SOCCP(1.1) に対して式 (2.3) を適用することにより不動点問題に定式化し，それを不動点アルゴリズムで解くアプローチを提案した．本

研究では，その定式化の方法を基に関数 $\boldsymbol{f}$ が非線形であるような SOCCP(1.1) に対しての同手法の拡張を提案する．

行列 $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ を適当に選び

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) = M\boldsymbol{u} - \boldsymbol{p}(\boldsymbol{u}) \tag{3.1}$$

と分割する．（すなわち，$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{u}) := M\boldsymbol{u} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})$ とする．）これと，式 (2.3) を $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})$ に代入すると，$\Lambda_2(\mathrm{abs}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}) = M\Lambda_1(\mathrm{abs}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x}) - \boldsymbol{p}(\boldsymbol{u})$ となるが，この両辺を整理すると，

$$\boldsymbol{x} = (M\Lambda_1 + \Lambda_2)^{-1}\Big((\Lambda_2 - M\Lambda_1)\,\mathrm{abs}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{p}(\boldsymbol{u})\Big) \tag{3.2}$$

となり，$\boldsymbol{u} = \Lambda_1(\mathrm{abs}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x})$ と合わせて不動点問題を得る．この不動点問題 (3.2) に対して，

$$\boldsymbol{u}^{(k)} := \Lambda_1(\mathrm{abs}(\boldsymbol{x}^{(k)}) + \boldsymbol{x}^{(k)}) \tag{3.3}$$

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} := (M\Lambda_1 + \Lambda_2)^{-1}\Big((\Lambda_2 - M\Lambda_1)\,\mathrm{abs}(\boldsymbol{x}^{(k)}) + \boldsymbol{p}(\boldsymbol{u}^{(k)})\Big) \tag{3.4}$$

を反復式として SOCCP の解を求めるのが本研究での提案アルゴリズムである．なお，線形な SOCCP の場合と同様，行列 M を上手く選ぶことが収束性およびアルゴリズムの性能向上のために重要である．

最後に収束解析の結果を述べる．与えられた集合 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ に対して

$$\sigma = \|(M\Lambda_1 + \Lambda_2)^{-1}(\Lambda_2 - M\Lambda_1)\| \tag{3.5}$$

$$\eta \geq \|(M\Lambda_1 + \Lambda_2)^{-1}\nabla \boldsymbol{p}\big(\Lambda_1(\mathrm{abs}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x})\big)^\top \Lambda_1\| \quad (\forall \boldsymbol{x} \in \Omega) \tag{3.6}$$

を満たすようなパラメータ σ, η を定める．また, 不動点アルゴリズムの初期点 $\boldsymbol{x}^{(0)}$ と NSOCCP(1.1) の解（の１つ）$\boldsymbol{x}^*$ に対して，閉球 $\overline{B}(\boldsymbol{x}^*, \|\boldsymbol{x}^{(0)} - \boldsymbol{x}^*\|)$ を考える．このとき，以下の定理が成り立つ．

定理 3.1　ある集合 $\Omega \supseteq \overline{B}(\boldsymbol{x}^*, \|\boldsymbol{x}^{(0)} - \boldsymbol{x}^*\|)$ が存在して，Ω 上で $\chi(\Lambda_1, \Lambda_2) := \sigma + 2\eta < 1$ が成り立つとする．このとき，不動点アルゴリズムで生成される点列 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ は NSOCCP(1.1) の解 $\boldsymbol{x}^*$ に収束する．

4　まとめ

本研究では，非線形な SOCCP に対して行列分割と不動点アルゴリズムを組み合わせたアプローチを提案し，適当な仮定の下で生成点列が SOCCP の解に収束することを示した．また，本稿では紙面の制約上割愛したが，Anderson 加速を組み合わせたアプローチとその収束性を示し，あるクラスの問題に対しては提案アルゴリズムの方が優位性をもつことを数値実験により確認した．

参考文献

[1] Z. Li, H. Zhang, Y. Jin, and L. Ou-Yang, Anderson accelerating the preconditioned modulus approach for linear complementarity problems on second-order cones, *Numerical Algorithms*, vol. 91, no. 2, pp. 803–839, 2022.

[2] Y. F. Ke, C. F. Ma, and H. Zhang, The modulus-based matrix splitting iteration methods for second-order cone linear complementarity problems, *Numerical Algorithms*, vol. 79, no. 4, pp. 1283–1303, 2018.