A closer target setting approach to SBM model with weight restrictions and production trade-offs

関谷 和之 (Kazuyuki Sekitani)[1], 堀 篤史 (Atsushi Hori)[2]
[1] 成蹊大学 (Seikei University), [2] 名古屋工業大学 (Nagoya Institute of Technology)
e-mail : kazuyuki-sekitani@st.seikei.ac.jp

1 Introduction

Data envelopment analysis (DEA) is a mathematical programming approach widely used to evaluate the efficiency of decision making units (DMUs) that consumes inputs to produce outputs. A unique feature of DEA is to provide efficiency score that indicates the input surplus and the output shortage, ranging from zero (the worst) to one (the best).

One of representative DEA models is the SBM model [1]; see the development of SBM in [2]. Tone [1] incorporates production trade-offs among inputs and/or outputs into SBM, that is referred to as SBM-AR, but its efficiency score may be negative. This study gives an answer to the issue by showing the limitation of SBM-AR and then modifies the original SBM-AR to enhance ease of achieving target and reliability of efficiency measure.

2 Preliminary

Let $(\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{y}_j) \in \mathbb{R}^{m+s}_{++}$ for $j = 1, \dots, n$ be an observed input-output data and let a matrix P (Q) be a coefficient matrix of inputs (output) weight restrictions. For an assessed $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{m+s}_{++}$, SBM-AR model is defined as follows:

$$\min \left\{ \frac{1 - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \frac{d_i^-}{x_i}}{1 + \frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s} \frac{d_r^+}{y_r}} \,\middle|\, (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}^-, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{d}^+) \in T, (\boldsymbol{d}^-, \boldsymbol{d}^+) \geq (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}) \right\}, \tag{1}$$

where T is a production possibility set $\left\{ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \,\middle|\, \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \boldsymbol{x}_j - P\boldsymbol{\alpha} \leq \boldsymbol{x}, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \boldsymbol{y}_j + Q\boldsymbol{\beta} \geq \boldsymbol{y}, \\ \boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{\alpha} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{\beta} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \right\}$.

For the set T, $\partial^s(T) := \left\{ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in T \,\middle|\, \begin{array}{l} (\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{y}) \geq (\boldsymbol{x}', -\boldsymbol{y}') \\ (\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{y}) \neq (\boldsymbol{x}', -\boldsymbol{y}') \end{array} \Longrightarrow (\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}') \notin T \right\}$, is defined as the strongly efficient frontier of T.

Theorem 1 Suppose $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in T \cap \mathbb{R}^{m+s}_{++}$ and let $(\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\alpha}^*, \boldsymbol{\beta}^*, \boldsymbol{d}^{-*}, \boldsymbol{d}^{+*})$ be an optimal solution of SBM-AR DEA model (1). Then $(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}^{-*}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{d}^{+*}) \in \partial^s(T)$.

In DEA, $(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}^{-*}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{d}^{+*})$ is called the target of $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

An efficiency measure is a mapping $F : T \cap \mathbb{R}^{m+s}_{++} \to [0, 1]$. Consider two axioms as desirable efficiency measures defined on the full space of inputs and outputs as follows:

Indication of Efficiency (I): For all $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in T \cap \mathbb{R}^{m+s}_{++}$, $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 1 \Longleftrightarrow (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \partial^s(T)$.

Monotonicity (M): For all pairs $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in T \cap \mathbb{R}^{m+s}_{++}$ and $(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}') \in T \cap \mathbb{R}^{m+s}_{++}$ satisfying $(\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{y}) \leq (\boldsymbol{x}', -\boldsymbol{y}')$ and $(\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{y}) \neq (\boldsymbol{x}', -\boldsymbol{y}')$, $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) > F(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}')$.

SBM without AR satisfies (I) and (M). SBM-AR provides a negative efficiency score as follows:

Theorem 2 Assume $\partial^s(T) \neq \emptyset$. If $\{-P\boldsymbol{\alpha} \mid \boldsymbol{\alpha} \geq \mathbf{0}\} \not\subseteq \mathbb{R}^m_+$, then SBM-AR (1) provides a negative efficiency score for some $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in T$.

3 Closer target setting approach to SBM-AR

The original natures of SBM model are (I), (M) and the following properties:

(A) the efficiency score is positive;
(B) the target belongs to $\partial^s(T)$;
(C) the target may achieve the farthest distance to $\partial^s(T)$.

Violation of (A), the negative efficiency scores, causes to violate the mononicity (M). The nature (C) is a shortcoming of the original SBM DEA model. Our adjustment to SBM-AR model aims to overcome (C) while to preserve the objective function, (A), (B) and (I). Let $g^-(\boldsymbol{d}^-) := \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \frac{x_i - d_i^-}{x_i}$, and $g^+(\boldsymbol{d}^+) := \frac{1}{s}\sum_{r=1}^s \frac{y_r + d_r^+}{y_r}$. Closer target setting approach to SBM-AR (1) is defined as follows: $F_S(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \max\left\{ \frac{g^-(\boldsymbol{d}^-)}{g^+(\boldsymbol{d}^+)} \;\middle|\; (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}^-, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{d}^+) \in \partial^s(T), (\boldsymbol{d}^-, \boldsymbol{d}^+) \geq (\mathbf{0}, \mathbf{0}) \right\}$. Replacing the arithmetic mean $g^+(\boldsymbol{d}^+)$ with the harmonic mean $h^+(\boldsymbol{d}^+) := s\left(\sum_{r=1}^s \frac{y_r}{y_r + d_r^+}\right)^{-1}$, we define $F_B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \max\left\{ \frac{g^-(\boldsymbol{d}^-)}{h^+(\boldsymbol{d}^+)} \middle| (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}^-, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{d}^+) \in \partial^s(T), (\boldsymbol{d}^-, \boldsymbol{d}^+) \geq (\mathbf{0}, \mathbf{0}) \right\}$. Note that $F_S = F_B$ if $m = s = 1$.

The closest target setting is formulated as the least distance DEA models including the following measures: an input-oriented least distance inefficiency measure $D^-(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \min\left\{ \sum_{i=1}^m \frac{d_i^-}{x_i} \middle| (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}^-, \boldsymbol{y}) \in \partial^s(T), \boldsymbol{d}^- \geq \mathbf{0} \right\}$, and an output-oriented least distance inefficiency measure $D^+(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \min\left\{ \sum_{r=1}^s \frac{d_r^+}{y_r} \middle| (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{d}^+) \in \partial^s(T), \boldsymbol{d}^+ \geq \mathbf{0} \right\}$.

Theorem 3 Consider matrix P with m rows, matrix Q with s rows and any $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in T \cap \mathbb{R}^{m+s}_{++}$. Suppose $\{\boldsymbol{v}^\top \in \mathbb{R}^m_+ \mid \boldsymbol{v}P \leq \mathbf{0}\} \subseteq \mathbb{R}^m_{++} \cup \{\mathbf{0}\}$ and $\emptyset \neq \{\boldsymbol{u}^\top \in \mathbb{R}^s_+ \mid \boldsymbol{u}Q \leq \mathbf{0}, \boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}\} \subseteq \mathbb{R}^s_{++}$. Then, $D^-(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \min_{i=1,\dots,m} \max\{\delta \mid (\boldsymbol{x} - \delta x_i \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{y}) \in T\}$ and $D^+(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \min_{r=1,\dots,s} \max\{\delta \mid (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \delta y_r \boldsymbol{e}_r) \in T\}$, where $\boldsymbol{e}_i$ denotes the ith unit vector, and $\boldsymbol{e}_r$ denotes the rth unit vector. F_S and F_B satisfies (I), (A) and (B). $F_S(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max\left\{1 - \frac{1}{m}D^-(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \frac{1}{1 + D^+(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})/s}\right\}$ and $F_B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max\left\{1 - \frac{1}{m}D^-(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), 1 - \frac{1}{s}\left(\frac{D^+(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{1 + D^+(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}\right)\right\}$. If $m \leq s$, then F_B satisfies (M).

4 Conclusion

SBM-AR cannot avoid providing negative efficiency scores. The hybrid models F_S, which combines SBM-AR and least distance models, resolves the issue. The model F_B, which is a variant of F_S, satisfies (M) when $m \leq s$, whereas neither SBM-AR nor least distance models satisfies (M). Computing F_B is a nonconvex optimization but it suffices to solve $(m + s)$ LPs.

参考文献

[1] K. Tone, A slacks-based measure of efficiency in data envelopment analysis, *Euro. J. Oper. Res.*, 130 (2001), 498–509.

[2] A. Emrouznejad, Ł. Brzezicki, & C. Lu, Development and evolution of slacks-based measure models in data envelopment analysis: A comprehensive review of the literature. *J. Econ. Survey*, (2025).

非線形最適化問題に対する非厳密逐次２次制約２次計画法

Inexact sequential quadratically constrained quadratic programming method for nonlinear optimization problems

矢部 博 (Hiroshi Yabe)[1], 中山 舜民 (Shummin Nakayama)[2]
[1] 山陽小野田市立山口東京理科大学 (Sanyo-Onoda City University), [2] 東京理科大学 (Tokyo University of Science)
e-mail : yabe@rs.tus.ac.jp

1 はじめに

本研究では以下の非線形最適化問題を考える．

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad f_0(x) \quad \text{subject to} \quad f_i(x) \le 0, \quad i \in I = \{1, \cdots, m\} \tag{1}$$

ただし，$f_0, f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は十分滑らかな関数とし，その勾配ベクトルを $g_i(x) \equiv \nabla f_i(x)\,(i = 0, 1, \cdots, m)$ とする．問題 (1) に対する代表的な解法の一つである逐次２次計画 (SQP) 法は，制約条件の１次近似とラグランジュ関数の近似ヘッセ行列を用いて作られる２次計画 (QP) 部分問題を各反復で解くことで探索方向を求める解法であるが，これは Maratos 効果が生じるという問題点がある．この問題点を解決するために逐次２次制約２次計画 (SQCQP) 法が提案された．SQCQP 法は，各反復において目的関数と制約条件の２次近似を用いた２次制約２次計画 (QCQP) 部分問題を解くことにより，探索方向を求める反復法である．SQCQP 法の部分問題は SQP 法の部分問題より複雑であるが，近年の数値解法の発達により QCQP 部分問題を効率よく解くことが可能となり，SQCQP 法が注目を集めている．しかしながら，SQCQP 法は必ずしも QCQP 部分問題が実行可能方向を生成するとは限らないという問題点を持つ．そこで，Jian [1] は QCQP 部分問題が実行可能方向を生成するように修正した SQCQP 法を提案した．さらに，渡邉ら [2] はその QCQP 部分問題を非厳密に解く非厳密 SQCQP 法を提案し，大域的収束性と超１次収束性を示した．しかしながら，渡邉ら [2] の非厳密 SQCQP 法の非厳密の基準は実装が困難であるという欠点があり，理論面と実装面との間に大きな隔たりがあった．本研究では，渡邉ら [2] の非厳密 SQCQP 法を改良した新たな非厳密 SQCQP 法を提案し，その収束性を示す．

2 実行可能方向を生成する SQCQP 法

SQCQP 法は最適化問題 (1) を解くための反復法であり，x^k を k 反復目の近似解として

$$x^{k+1} = x^k + \lambda_k d^k$$

によって点列を更新する．ここで，$\lambda_k > 0$ はステップ幅であり，$d^k \in \mathbb{R}^n$ は探索方向である．更新された点 x^{k+1} が最適化問題 (1) の制約を満たすためには，d^k が実行可能方向である必要がある．そこで，Jian [1] は以下のような部分問題を解いて d^k を計算する SQCQP 法を提案した．

$$\begin{array}{ll} \displaystyle\min_{(z,d)\in\mathbb{R}^{n+1}} & \gamma z + \dfrac{1}{2} d^T G_0^k d \\ \text{subject to} & g_0(x^k)^T d \le \gamma z \\ & f_i(x^k) + g_i(x^k)^T d + \dfrac{1}{2} d^T G_i^k d \le \gamma_i \sigma_k z, \ i \in I \\ & \dfrac{1}{2}\varepsilon\sigma_k \|d\|^2 \le c\varepsilon\sigma_k^{2\tau+1}, \end{array} \tag{2}$$

ただし，γ, γ_i, τ は正の定数，σ_k は正のパラメータとし，ε は非負の定数，G_0^k は正定値対称行列，G_i^k は半正定値対称行列である．問題 (2) の制約条件 $\frac{1}{2}\varepsilon\sigma_k\|d\|^2 \le c\varepsilon\sigma_k^{2\tau+1}$ は，$\varepsilon \neq 0$ のとき $\|d\|^2 \le 2c\sigma_k^{2\tau}$ となり，d のノルムを制限するものになる．また，$\varepsilon = 0$ のときは d のノルムの制限はないことに注意する．

3 提案手法

本研究では，Jian [1] の QCQP 部分問題 (2) を非厳密に計算して得られる探索方向 d^k を用いた SQCQP 法を考える．QCQP 部分問題 (2) の非厳密の基準として，各反復では次の緩和 KKT 条件を満たす点 $(z, d, \mu, u, v) = (z_k, d^k, \mu_k, u^k, v_k)$ を考える．

$$\|G_0^k d + \mu g_0(x^k) + \sum_{i\in I} u_i(g_i(x^k) + G_i^k d) + \varepsilon\sigma_k v d\| \le \varepsilon_1^k \|d\|^{1+\nu}, \tag{3}$$

$$\gamma = \gamma\mu + \sigma_k \sum_{i\in I} \gamma_i u_i, \tag{4}$$

$$\gamma z - g_0(x^k)^T d \ge -\varepsilon_2^k \|d\|^2, \tag{5}$$

$$\gamma_i\sigma_k z - f_i(x^k) - g_i(x^k)^T d - \frac{1}{2} d^T G_i^k d \ge -\varepsilon_3^k \|d\|^{2+\hat{\tau}},\ i \in I, \tag{6}$$

$$c\varepsilon\sigma_k^{2\tau+1} - \frac{1}{2}\varepsilon\sigma_k\|d\|^2 \ge 0, \tag{7}$$

$$|\mu(\gamma z - g_0(x^k)^T d)| \le \varepsilon_4^k \|d\|,\ \mu \ge 0, \tag{8}$$

$$|u_i(\gamma_i\sigma_k z - f_i(x^k) - g_i(x^k)^T d - \frac{1}{2} d^T G_i^k d)| \le \varepsilon_5^k \|d\|^{2+\hat{\tau}},\ u_i \ge 0,\ i \in I, \tag{9}$$

$$\varepsilon|v(c\sigma_k^{2\tau+1} - \frac{1}{2}\sigma_k\|d\|^2)| \le \varepsilon_6^k \|d\|^{2+\hat{\tau}},\ v \ge 0, \tag{10}$$

ただし，ν, ε_1^k ε_2^k, ε_3^k, ε_4^k, ε_5^k, ε_6^k は有界な非負パラメータとし，$\hat{\tau}$ は $\varepsilon = 0$ のとき $\hat{\tau} = 0$，$\varepsilon > 0$ のとき $\hat{\tau} = \dfrac{1}{\tau}$ とする．さらに，緩和 KKT 条件 (3)–(10) に加えて，ε_7^k を有界な非負パラメータとし，

$$\gamma z + \frac{1}{2} d^T G_0^k d \le \varepsilon_7^k \|d\|^2, \tag{11}$$

の条件を付加する．緩和 KKT 条件 (3)–(10) と (11) を満たす QCQP 部分問題の非厳密解を用いた SQCQP 法を提案する．

ここで，$\varepsilon_1^k = \varepsilon_2^k = \varepsilon_3^k = \varepsilon_4^k = \varepsilon_5^k = \varepsilon_6^k = 0$ の場合には，QCQP 部分問題 (2) の KKT 条件に一致し，さらに $\varepsilon_7^k = 0$ とした (11) は常に成り立つ．また，$\varepsilon_5^k = \varepsilon_6^k = \varepsilon_7^k = 0$ の場合には渡邉ら [2] の非厳密の基準と一致する．しかしながら，解法の実用化を目指すためには，ε_5^k, ε_6^k, $\varepsilon_7^k > 0$ も許容するようなアルゴリズムを構築することが望ましいので，本研究ではこの問題点を解決した．以上のアルゴリズムについて，大域的収束性を示す．

参考文献

[1] J. B. Jian, New sequential quadratically constrained quadratic programming method of feasible directions and its convergence rate, Journal of Optimization Theory and Applications, 129 (2006), 109-130.

[2] 渡邉遊，中谷啓，矢部博，実行可能方向を生成する非厳密逐次二次制約二次計画法の大域的収束性と超一次収束性，統計数理研究所共同研究リポート 387 (2017)，89–100.

非平滑関数に対する確率的勾配降下法へのチェビシェフ法の適用と収束解析

Application of Chebyshev Method to Stochastic Gradient Descent on Nonsmooth Functions and its Convergence Analysis

楊 家宝 (Jiabao Yang)[1], 佐々木 多希子 (Takiko Sasaki)[1]
[1] 武蔵野大学 (Musashino University)
e-mail：g2558001@stu.musashino-u.ac.jp

1　はじめに

本研究では，以下のような連続無制約最適化問題を考える．

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} V(\boldsymbol{x}) \tag{1}$$

ただし，$V:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ は局所リプシッツ連続で下に有界であり，さらに強圧的であると仮定する．（V には平滑性や凸性は仮定しない．）このような最適化問題を解くとき，一般に連続最適化手法が用いられるが，それらの一部は常微分方程式に対する数値解法と見なすことができる．Ushiyama ら [1] では，常微分方程式の数値解析の観点から，目的関数に凸性や平滑性を仮定して，最急降下法より安定領域を広くとれる一段法「第 9 次チェビシェフ法」を提案した．一方で，目的関数が非凸や非平滑な関数である場合に，Riis ら [2] は，[2] で提案されたアルゴリズムによる点列が，目的関数が局所リプシッツ連続であれば，非平滑関数における一般化された停留点に収束することを示し，その有効性を数値的にも示した．

本研究では，[2] の証明手法に基づき，[1] の手法と [2] の手法を組み合わせた最適化手法を提案した．また提案するアルゴリズムによる集積点が，一般化された停留点の集合に収束することを証明した．

2　提案手法

本研究では，必ずしも平滑と限らない目的関数を扱うため，以下のように微分を定義する．

定義 1　$V:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ を局所リプシッツ連続関数とし，$\boldsymbol{x},\boldsymbol{d}\in\mathbb{R}^n$ に対して，次を定義する．

$$V^o(\boldsymbol{x};\boldsymbol{d})=\limsup_{\boldsymbol{y}\to\boldsymbol{x},\lambda\downarrow 0}\frac{V(\boldsymbol{y}+\lambda\boldsymbol{d})-V(\boldsymbol{y})}{\lambda}.$$

定義 2　$V:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ を局所リプシッツ連続関数とする．$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ に対して，次を定義する．

$$\partial V(\boldsymbol{x})=\{\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^n:^{\forall}\boldsymbol{d}\in\mathbb{R}^n,\ V^o(\boldsymbol{x};\boldsymbol{d})\geq\langle\boldsymbol{d},\boldsymbol{p}\rangle\}.$$

ここで，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=a_1b_1+\cdots+a_nb_n$ $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^n)$ である．

さらに，$\partial V(\boldsymbol{x})$ は以下のように表すことができる．

$$\partial V(\boldsymbol{x})=\mathrm{co}\{\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^n:^{\exists}(\boldsymbol{x}^k)_{k\in\mathbb{N}}\subset D(V)\ \text{s.t.}\ \nabla V(\boldsymbol{x}^k)\to\boldsymbol{p}\ (\boldsymbol{x}^k\to\boldsymbol{x})\}.$$

ただし，$D(V)$ は関数 V が微分可能な点全体の集合を表し，co は集合の凸包を意味する．

定義 3　$\boldsymbol{0}\in\partial V(\boldsymbol{x}^*)$ であるとき，$\boldsymbol{x}^*\in\mathbb{R}^n$ を V の Clarke 定常点という．

定義 4　$\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\boldsymbol{0}\}$ に対し，以下が成り立つとき，V は $\boldsymbol{x}^*$ において，$\boldsymbol{d}$ について Clarke 方向定常であると定義する．

$$\min \{V^o(\boldsymbol{x}^*; \boldsymbol{d}), V^o(\boldsymbol{x}^*; -\boldsymbol{d})\} \geq 0.$$

S^{n-1} は単位球面 $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}\| = 1\}$ と定義される．点 $\boldsymbol{x}^*$ が Clarke 定常点であるための必要十分条件は，V が $\boldsymbol{x}^*$ において任意の $\boldsymbol{d} \in S^{n-1}$ に対して，Clarke 方向定常であることである．

本研究の提案手法は以下のとおりである．列 $(\boldsymbol{x}^k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ を以下のアルゴリズムに従って更新する．ただし，各 $k \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, 2, \cdots, 9\}$ に対して，$h_k > 0$ はステップ幅，$\boldsymbol{d}_i^k \in S^{n-1}$ は探索方向である．また，z_i $(i = 1, 2, \cdots, 9)$ は $R_9(z) = T_9(w_0 + w_1 z)/T_9(w_0)$ の根である．ただし，$T_9(z)$ は第 9 次 Chebyshev 多項式，$w_0 = 1 + \frac{\varepsilon}{81}$，$w_1 = \frac{T_9(w_0)}{T_9'(w_0)}$ である．

Algorithm 1 提案手法

1: **Step 1:** $\boldsymbol{g}_0^k = \boldsymbol{x}^k$ とする．

2: **Step 2:** $i = 1, 2, \cdots, 9$ とする．
$i = i + 1$ として，$\boldsymbol{d}_i^k \in S^{n-1}$ をランダムに選ぶ．

$$\boldsymbol{g}_i^k = \begin{cases} \boldsymbol{g}_{i-1}^k & (\boldsymbol{g}_{i-1}^k \text{ が } \boldsymbol{d}_i^k \text{ について Clarke 方向定常であるとき}) \\ \boldsymbol{g}_i^k = \boldsymbol{g}_{i-1}^k - \frac{h_k}{z_i}\beta_i^k \boldsymbol{d}_i^k & (\boldsymbol{g}_{i-1}^k \text{ が } \boldsymbol{d}_i^k \text{ について Clarke 方向定常でないとき}) \\ \text{ここで } \beta_i^k \neq 0 \text{ は以下の方程式の解とする：} & \beta_i^k = \frac{z_i(V(\boldsymbol{g}_{i-1}^k - \frac{h_k}{z_i}\beta_i^k \boldsymbol{d}_i^k) - V(\boldsymbol{g}_{i-1}^k))}{h_k \beta_i^k}. \end{cases}$$

3: **Step 3:** $\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{g}_9^k$ とする．

4: **Step 4:** $k = k + 1$ として，Step 1 へ戻る．

3　主結果

以上の設定のもとで，次の定理が得られる．

定理 5　$V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は局所リプシッツ連続で下に有界であり，さらに強圧的であると仮定する．列 $(\boldsymbol{x}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ が Algorithm 1 を満たし，かつ $(\boldsymbol{d}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ が確率分布 Ξ から独立に抽出とする．また，確率分布 Ξ の確率密度関数 f は，$f(\boldsymbol{d}) > 0$ $(\boldsymbol{d} \in S^{n-1})$ を満たすことを仮定する．S を $(\boldsymbol{x}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ の集積点の集合とし，$X = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{0} \notin \partial V(\boldsymbol{x})\}$ とする．このとき，ある開集合の族 $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ が存在して，以下が成り立つ．

$$X \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j \quad \text{かつ} \quad \text{すべての } j \in \mathbb{N} \text{ に対して } \mathbb{P}(S \cap B_j \neq \emptyset) = 0.$$

参考文献

[1] K. Ushiyama, S. Sato, T. Matsuo, Deriving efficient optimization methods based on stable explicit numerical methods, JSIAM Letters, 14 (2022), 29–32.

[2] E. S. Riis, M. J. Ehrhardt, G. R. W. Quispel, C.-B. Schönlieb, A Geometric Integration Approach to Nonsmooth, Nonconvex Optimisation, Foundations of Computational Mathematics (2022), 22:1351–1394.

混合整数半正定値計画問題に対する 2 次錐カットアルゴリズム

Cutting Second-Order Cone Method for Mixed-Integer Semidefinite Programming

桒田 拓海 (Takumi Kuwada)[1], 村松 正和 (Masakazu Muramatsu)[1],
中山 舜民 (Shummin Nakayama)[2]
[1] 電気通信大学 (The University of Electro-Communications), [2] 東京理科大学 (Tokyo University of Science)
e-mail : k2431059@gl.cc.uec.ac.jp

1 はじめに

本研究では、以下の混合整数半正定値計画問題 (MISDP) を考える.

$$\max_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n, \boldsymbol{y}\in\mathcal{Y}, S\in\mathcal{S}^N_+} \quad \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} + \boldsymbol{d}^\top \boldsymbol{y} \quad \text{subject to} \quad G - \sum_{i=1}^n x_i A_i - \sum_{j=1}^m y_j B_j = S. \tag{1}$$

ここで，G，A_i，$B_j \in \mathcal{S}^N$ $(i = 1, 2, \cdots, n, j = 1, 2, \cdots, m)$，$\mathcal{S}^N := \{S \in \mathbb{R}^{N\times N} : S = S^\top\}$ であり, A, $B \in \mathcal{S}^N$ の内積 $A \bullet B := \mathrm{Tr}(AB)$ を $\mathcal{S}^N$ 上の標準内積とし，$\mathcal{S}^N_+ := \{S \in \mathcal{S}^N : (\boldsymbol{z}\boldsymbol{z}^\top) \bullet S \geq 0\ (\forall \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^N)\}$ であるとする．また, $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{u} \in \mathbb{Z}^m$ に対して，$\mathcal{Y} := \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{Z}^m : \boldsymbol{l} \leq \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{u}\}$ である．最適化問題 (1) に対する解法として，分枝限定法と外部近似法が知られている．本研究では外部近似法に注目する．従来の外部近似法の一つである切除平面法は線形の外部近似を施し，混合整数線形計画問題 (MILP) を繰り返し解くことで最適化問題 (1) の ε-外部近似解を得るアルゴリズムである．本研究では，新しい 2 次錐を用いた外部近似を提案する．提案外部近似を用いて混合整数 2 次錐計画問題 (MISOCP) を繰り返し解くことで最適化問題 (1) の ε-外部近似解を求めるアルゴリズムを構築し，数値的な性能を評価する．

2 外部近似法

最適化問題 (1) に対する外部近似法は，一般の閉凸錐上の最適化問題に対する Benders 分解法 [1] に基づき $\mathcal{H} \subseteq \mathrm{Extr}(\mathcal{S}^N_+)$，$\mathcal{F} = \{S \in \mathcal{S}^N : Z \bullet S \geq 0\ \ (\forall Z \in \mathcal{H})\}$ を与え，緩和問題

$$\mathrm{MIP}(\mathcal{F}) \left| \ \max_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n, \boldsymbol{y}\in\mathcal{Y}, S\in\mathcal{F}} \quad \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} + \boldsymbol{d}^\top \boldsymbol{y} \quad \text{subject to} \quad G - \sum_{i=1}^n x_i A_i - \sum_{j=1}^m y_j B_j = S \right. \tag{2}$$

の最適解 $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}, \bar{S})$ が $\bar{S} \in \mathcal{S}^N_+$ を満たすまで $\mathcal{F}$ の領域を縮小し，緩和問題 (2) を逐次的に解くアルゴリズムである．ここで，$\mathrm{Extr}(\mathcal{S}^N_+)$ は半正定値錐 $\mathcal{S}^N_+$ の端線全体の集合である．以上をまとめたアルゴリズムを Algorithm 1 で与える．外部近似法の一つである切除平面法では Algorithm 1 における $\mathcal{F}$ の更新を適当なベクトル $\boldsymbol{u}_k \in \mathbb{R}^N$ を用いて，

$$\mathcal{H}^{CPM}_k = \left\{\boldsymbol{u}_k \boldsymbol{u}_k^\top\right\}, \ \ \mathcal{F} \leftarrow \mathcal{F} \cap \left\{S \in \mathcal{S}^N : (\boldsymbol{u}_k \boldsymbol{u}_k^\top) \bullet S \geq 0\right\}$$

とすることで MILP を繰り返し解く．ここで，$\mathcal{H}^{CPM}_k \subseteq \mathrm{Extr}(\mathcal{S}^N_+)$ であることに注意する．一般には，$\boldsymbol{u}_k$ として，(1) の制約 $S \in \mathcal{S}^N_+$ に最も違反している S_k の最小固有値 λ に対応した固有ベクトルが用いられる．

Algorithm 1 最適化問題 (1) に対する ε-外部近似アルゴリズム

Require: 許容誤差 $\varepsilon > 0$, $\mathcal{H}_0 \subseteq \mathrm{Extr}(\mathcal{S}_+^N)$

$k \leftarrow 0,\ \lambda \leftarrow -\infty,\ \mathcal{F} \leftarrow \left\{ S \in \mathcal{S}^N : Z \bullet S \geq 0\ \ (\forall Z \in \mathcal{H}_0) \right\}$

while $\lambda \leq -\varepsilon$ **do**

MIP($\mathcal{F}$) の最適解 $(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{y}_k, S_k)$ を求める．$\lambda \leftarrow S_k$ の最小固有値．$k \leftarrow k+1$.

$\mathcal{H}_k \subseteq \mathrm{Extr}(\mathcal{S}_+^N)$ を適当にとる．$\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{F} \cap \left\{ S \in \mathcal{S}^N : Z \bullet S \geq 0\ \ (\forall Z \in \mathcal{H}_k) \right\}$ とする．

end while

return $(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{y}_k, S_k)$

3 提案手法

本研究では，Algorithm 1 における $\mathcal{H}_k$ を単集合ではなく適当な線形独立なベクトル $\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^N$ の張る線形包 $\mathrm{span}(\{\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{v}_k\})$ によって定められる無限集合に拡張し，$\mathcal{F}$ を更新することを考える．

$$\mathcal{H}_k^{CSM} = \left\{ \boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^\top : \boldsymbol{w} \in \mathrm{span}(\{\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{v}_k\}) \right\},\ \ \mathcal{F} \leftarrow \mathcal{F} \cap \left\{ S \in \mathcal{S}^N : Z \bullet S \geq 0\ \ (\forall Z \in \mathcal{H}_k^{CSM}) \right\}$$

として $\mathcal{F}$ を更新する上で，無限集合 $\mathcal{H}_k^{CSM} \subseteq \mathrm{Extr}(\mathcal{S}_+^N)$ を扱うことは困難である．そこで，ユークリッドノルム $\|\cdot\|$ を用いて 2 次錐 $\mathcal{Q}_{l+1} := \left\{ (x_0, \boldsymbol{x}_l^\top)^\top \in \mathbb{R}^{l+1} : x_0 \geq \|\boldsymbol{x}_l\| \right\}$ を定義すると，次の定理が成り立つ．

定理 1 任意のベクトル $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^N$ に対して，

$$\begin{aligned} &\left\{ S \in \mathcal{S}^N : Z \bullet S \geq 0\ \ (\forall Z \in \mathcal{H}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})) \right\} \\ &= \left\{ S \in \mathcal{S}^N : (\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^\top) \bullet S \geq 0, (\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^\top) \bullet S \geq 0, \begin{pmatrix} (\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^\top + \boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^\top) \bullet S \\ (\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^\top + \boldsymbol{v}\boldsymbol{u}^\top) \bullet S \\ (\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^\top - \boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^\top) \bullet S \end{pmatrix} \in \mathcal{Q}_3 \right\} \end{aligned}$$

が成り立つ．ただし，$\mathcal{H}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \left\{ \boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^\top : \boldsymbol{w} \in \mathrm{span}(\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}) \right\}$ とする．

本研究では，定理 1 を用いて，無限集合 $\mathcal{H}_k^{CSM}$ を扱う代わりに，2 次錐制約を用いて $\mathcal{F}$ を

$$\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{F} \cap \left\{ S \in \mathcal{S}^N : (\boldsymbol{u}_k\boldsymbol{u}_k^\top) \bullet S \geq 0, (\boldsymbol{v}_k\boldsymbol{v}_k^\top) \bullet S \geq 0, \begin{pmatrix} (\boldsymbol{u}_k\boldsymbol{u}_k^\top + \boldsymbol{v}_k\boldsymbol{v}_k^\top) \bullet S \\ (\boldsymbol{u}_k\boldsymbol{v}_k^\top + \boldsymbol{v}_k\boldsymbol{u}_k^\top) \bullet S \\ (\boldsymbol{u}_k\boldsymbol{u}_k^\top - \boldsymbol{v}_k\boldsymbol{v}_k^\top) \bullet S \end{pmatrix} \in \mathcal{Q}_3 \right\}$$

として更新する Algorithm 1 を提案する．ここで，$\mathbb{R}^N$ 上の第 i 基本ベクトルを $\boldsymbol{e}_i$ としたとき，$\mathcal{H}_0 = \bigcap_{i,j \in \{1,2,\cdots,N\}} \mathcal{H}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$ とし，$\mathcal{F}$ の更新に線形従属なベクトル $\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{v}_k$ を用いれば既存の外部近似法 [2] に一致することに注意する．

4 数値実験

提案アルゴリズムについて数値実験をした．結果の詳細については当日報告する．

参考文献

[1] H. Saito and K. Murota, Benders decomposition approach to robust mixed integer programming, Pacific Journal of Optimization, 3 (2007), 99–112.

[2] D. Bertsimas and R. Cory-Wright, On polyhedral and second-order cone decompositions of semidefinite problems, Operations Research Letters, 48 (2020), 78–85.