

流線トポロジカルデータ解析による二次元乱流データの判別

Characterizing Two-Dimensional Turbulent Data via Topological Flow Data Analysis

木村 満晃 (Mitsuaki Kimura)¹, 坂上 貴之 (Takashi Sakajo)², 竹内 博志 (Hiroshi Takeuchi)², 松本 剛 (Takeshi Matsumoto)², 横山 知郎 (Tomoo Yokoyama)³

¹ 大阪歯科大学 (Osaka Dental University), ² 京都大学 (Kyoto University),

³ 埼玉大学 (Saitama University)

e-mail : takeuchi.hiroshi.6i@kyoto-u.ac.jp

二次元 (平坦) トーラス上 \mathbb{T}^2 上の密度一定の非圧縮粘性流体の運動を考える. このような流体運動は現実の流れとしては存在しないが, スペクトル法などの高精度スキームが利用できるため, 境界の影響などを排除して流体方程式の持つ非線型性と複雑乱流構造の関係を調べる数値計算において, よく用いられる設定である. 二次元乱流では大小さまざまな渦構造が相互作用して, 次第に大きなスケールの渦構造へ遷移していくことが知られている. これに応じて, エンストロフィー (渦度の L^2 ノルム) のスペクトルの統計則を見たとき, 粘性流体の非粘性極限では, 高波数の小スケール渦から低波数の大スケールの渦へとエンストロフィーが輸送される「逆カスケード」と呼ばれる現象が確認される. その生成メカニズムの解明に向けて, 複雑な流れのパターンの中から大小さまざまなコヒーレントな渦構造を抽出して, それらの相互作用を調べるのが重要となる.

二次元の流れから回転流構造を抜き出す新たなアイデアとして, トポロジーと力学系理論に基づいて孤立した回転領域を抽出する流線トポロジカルデータ解析 (Topological Flow Data Analysis=TFDA) という方法が近年提案されている. この方法では, 二次元ベクトル場によって生成される粒子軌道 (流線) 群を考え, それらのトポロジカルな構造を, ベクトル場における平衡点の指数に関するポアンカレ・ホップの定理と粒子軌道群の $t \rightarrow \pm\infty$ における $\omega(\alpha)$ 極限軌道を与えるポアンカレ・ベンディクソンの定理により分類し, 流線群の連結構造の様子を離散グラフ (木構造) として表現するものである. 論文 [1] では, \mathbb{R}^2 上の一様流中のハミルトン流れについて, 粒子軌道の作る大域的なトポロジカルな構造が, 有限個の軌道の組み合わせで表現できることを示した. その後, この組み合わせ構造は, ハミルトン関数のレーブグラフと同一の部分円順序根付き木 (partially Cyclically-Ordered rooted Tree=COT) に一対一に対応することが示されている [2]. さらに, COT は COT 表現と呼ばれる文字列表現を持ち, これにより, ハミルトン流れ場のトポロジカル構造を文字として認識し, そこからコヒーレントな回転流成分が抽出することが可能となる.

本研究は, この解析手法を \mathbb{T}^2 上のハミルトンベクトル場に拡張するものである. \mathbb{T}^2 は \mathbb{R}^2 とは流れの領域の幾何学的構造が異なるため, 既存の理論はそのまま適用できない. 一般に 2 次元多様体では局所座標ごとにハミルトニアンを定義するしかないからである. しかし, \mathbb{T}^2 は一つの局所座標系で曲面の上のすべての点が一意に表現されるので, これを (x, y) 平面と同一視して, その上で定義されるハミルトン関数 $H(x, y)$ が与えられれば, 流線軌道群は \mathbb{R}^2 と同等にこのハミルトン関数の等高線と一致する. また, \mathbb{T}^2 上のハミルトニアンのレーブグラフは一つのループを持つため, COT を構成するには工夫が必要である.

本講演では応用例として, 二次元乱流における代表的な二つの流れ, エンストロフィーカスケード (EC) 流と逆カスケード (IC) 流を統計的に判別する数値実験の結果について報告する. 具体的な解析手順として, まず EC 流および IC 流の各シミュレーションデータからレーブグラフを構築した.

このグラフの末端ノードに対応する渦構造を流れの基本的な構成要素と捉え、「末端渦」と定義する(図 1)。次に、この末端渦が持つ物理量の統計分布を解析し、両者の違いを定量的に評価した。



図 1: 乱流データにおける末端渦の例。左図は TFDA によって計算された COT 表現に基づくトポロジカルな領域分割構造を表す。中央図と右図はそれぞれ COT の末端ノードにおける σ_+ および σ_- に対応する渦領域を抽出したものである。

最初に、各末端渦の面積分布を調べたところ、両者の間に顕著な統計的差異が見出された。赤池情報量規準 (AIC) を用いたフィッティング評価により、EC 流における渦面積の分布は対数正規分布に、一方で IC 流のそれはガンマ分布によく従うことが示された。この違いは、それぞれのカスケードプロセスによって生成される微細構造の性質の違いを反映していると考えられる。

さらに、各末端渦が持つエンストロフィーおよびエネルギーと、渦面積との相関関係を 2 次元ヒストグラムで可視化した。その結果、EC 流のヒストグラムでは分布に大きな揺らぎが観測されたのに対し、IC 流ではデータ点がシャープな直線状に整列し、揺らぎが極めて小さいという質的な違いが明確になった。これは、IC 流における構造がより秩序立っていることを示唆している。

以上の結果は、本手法が流れ場の局所的な構成要素 (末端渦) の統計的性質を捉えることで、EC 流と IC 流という物理的・大局的に異なる現象を明確に識別可能であることを示している。これは、複雑な流れ場の特徴量化と判別に本手法が有効であることを示す一例であり、当日はこれらの結果について詳細に議論する。

謝辞 本研究は科学技術振興機構 (JST) 未来社会創造事業 JPMJMI22G1 および BIPROGY (株) との共同研究契約から支援を受けています。

参考文献

- [1] T. Yokoyama and T. Sakajo, Word representation of streamline topologies for structurally stable vortex flows in multiply connected domains, Proc. Roy. Soc. A, 469, 20120558, 2013.
- [2] 宇田智紀, 横山知郎, 坂上貴之, パーシステントホモロジーとレーブグラフを用いた 2 次元ハミルトンベクトル場の流線位相構造の自動抽出アルゴリズム, 日本応用数理学会論文誌, 29(2), 2018, 187–224.

因果解析とマグニチュードホモロジー

Causal analysis via magnitude homology

狩野 隼輔 (Shunsuke Kano)¹

¹ 東北大学, MathCCS (Tohoku University, MathCCS)

e-mail : s.kano@tohoku.ac.jp

1 導入

統計的因果解析は歴史ある統計学の研究分野で、現在も活発に研究されている。DirectLiNGAM はサンプルデータセットから因果関係を推定するアルゴリズムの一つで、清水ら [2] によって導入された。DirectLiNGAM で推定される因果関係は「因果グラフ」と呼ばれる重み付き非輪状グラフで表される。Wide Learning は予測問題に対する説明可能機械学習モデルの一つで、特徴的な因果関係を満たすための「条件」を列挙することができる。各条件は部分データセットに対応し、それぞれに DirectLiNGAM を施すことで、個別のサンプルに特化した「条件付き因果グラフ」が得られる。しかし、この条件は通常非常に多く、それらを一挙に比較することは非常に困難となる。本発表では因果グラフを比較する手法として、マグニチュードホモロジー（の変種）を用いる方法を提案する。

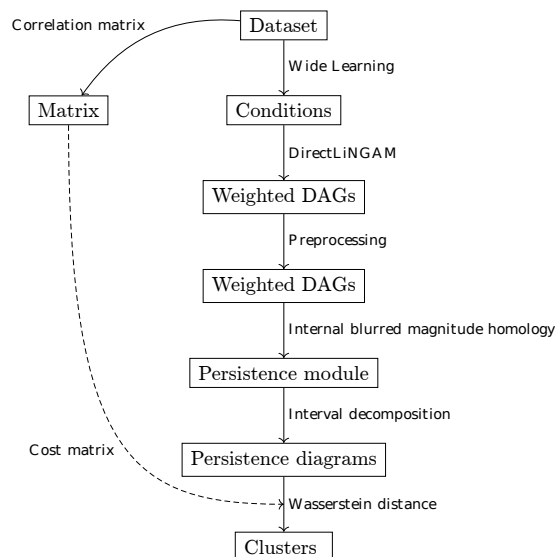


図 1. 条件のクラスターリングのパイプライン

2 マグニチュードホモロジー

マグニチュードホモロジーとは Leinster によって導入された距離空間の不変量であるマグニチュードの圏化で、現在は豊稜圏にまでその定義範囲は拡張されている。今回は、重み付きの非輪状グラフ $G = (V, E, w)$ を次のような一般化された距離空間 X_G と見做してマグニチュードホモロジーを計算する: X_G の底空間は頂点集合 V とし、 $x, y \in V$ に対して x から y への距離 $d(x, y)$ を、 x から y への有向路がある場合は、それに沿った重みの和の有向路についての最小値とする。ただし、有向路が無い場合は ∞ とする。この関数は対称性を満たさないが豊稜圏ではあるため、マグニチュードホモロジーは well-defined となる。マグニチュードホモロジーは距離関数の値、すなわちグラフの重みに敏感に反応してしまうが、パーシステント化して重みの変化についてロバストにした亜種が Otter[1] によって導入されており、ばかしマグニチュードホモロジー (blurred magnitude homology) と呼ばれ、次のようにして定義される。正重み付き非輪状グラフ $G = (V, E, w)$ に対し、その長さ $\ell \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ の第 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ばかしマグニチュードチェーン複体を

$$BMC_{n,\ell}(G) := \mathbb{Z}\{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in V^{n+1} \mid x_0 \neq \dots \neq x_n, d(x_0, x_1) + \dots + d(x_{n-1}, x_n) \leq \ell\},$$

$$\partial_{n,\ell}(x_0, \dots, x_n) := \sum_{i=0}^n (-1)^i (x_0, \dots, \overset{\vee}{x_i}, \dots, x_n)$$

と定義する. このホモロジーを $BMH_{n,\ell}(G)$ と書き, G の長さ ℓ の第 n ぼかしマグニチュードホモロジーと呼ぶ.

ぼかしマグニチュードホモロジーは各 n について, ℓ に関してパーシステント加群になっており, これまでの TDA の技術が様々流用できることが期待できる. 筆者は, 矢の重みが負でも良く, ホモロジーが良い直和分解を持つようにするために, 境界準同型を

$$\partial_{n,\ell}^\circ(x_0, \dots, x_n) := \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i (x_0, \dots, \overset{\vee}{x_i}, \dots, x_n)$$

と和を取る部分を変更し, このホモロジーを $BMH_{n,\ell}^\circ(G)$ と書き, 内部的ぼかしマグニチュードホモロジー (internal blurred magnitude homology) と呼ぶことにした. 良い直和分解とは

$$BMH_{n,\ell}^\circ(G) = \bigoplus_{a,b \in V} BMH_{n,\ell}^\circ(G; a, b)$$

のことで, $BMH_{n,\ell}^\circ(G; a, b)$ は, 生成元を $(a, x_1, \dots, x_{n-1}, b)$ というもののみに制限した部分加群を表す. $PD_n^b(G; a, b) \subset \mathbb{R}^2$ で $BMH_n^\circ(G; a, b)$ の有界パーシステント図とする.

3 因果グラフ間の距離

因果グラフは重み付きの非輪状グラフ $G = (V, E, w)$ として表され, 各重みは因果の強さを表す. 特に, 重みは負の場合もある. また, 2 頂点 $a, b \in V$ に対し, a から b への因果効果の大きさ $\text{cau}(a, b)$ は, a から b へ行く有向路に沿った重みの積の有向路全体に関する和となる. G に対応する一般化距離空間 X_G の距離の定義と比較し, 因果グラフに対しては前処理として, 重み関数に $-\log |\bullet|$ を合成することとする. さらに, X_G の距離構造に寄与しない辺をカットしたグラフを G^{trop} と書くことにする. 2 つの因果グラフ G_1 と G_2 の距離は, 点群

$$P_i = \bigcup_{n \geq 0} \bigcup_{a, b \in V} PD_n^b(G_i^{\text{trop}}; a, b), \quad i = 1, 2$$

間の Wasserstein 距離で, 特にコスト関数に $p \in P_i$ がどの $(a, b) \in V^2$ について $PD_n^b(G_i^{\text{trop}}; a, b)$ の元となるかで, コスト関数を用いたペナルティを与えたもので測る. このペナルティ項は, 関係の無い頂点間因果関係のマッチングを防ぐ効果を与えている.

謝辞 本研究は富士通 × 東北大学共創研究所での共同研究が発端となって始まった研究で, 現在 CREST (代表研究者: 焼野藍子) の助成を受けています. 共創研究所, 並びに CREST 研究チームの皆様, とくに, Wasserstein 距離など多くのアイデアを頂いた谷地村敏明氏に感謝します.

参考文献

- [1] N. Otter, *Magnitude meets persistence. Homology theories for filtered simplicial sets*, Homology Homotopy Appl. **24** (2022), 365–387.
- [2] S. Shimizu, T. Inazumi, Y. Sogawa, A. Hyvärinen, Y. Kawahara, T. Washio, P. O. Hoyer, Patrik O. and K. Bollen, *DirectLiNGAM: a direct method for learning a linear non-Gaussian structural equation model*, J. Mach. Learn. Res. **12** (2011), 1225–1248.

絡み目の絡み目ホモトピー類の分類と判定について

On classification and distinction of link-homotopy classes of links

小島居 祐香 (Yuka Kotorii)^{1,2,3}, 水澤 篤彦 (Atsuhiko Mizusawa)⁴,

¹ 広島大学 (Hiroshima university) ² 広島大学持続可能性に寄与するキラルノット超物質拠点 (WPI-SKCM²), ³ 理化学研究所 (RIKEN), ⁴ 早稲田大学 (非常勤講師) (Waseda University (part-time lecturer))

e-mail : kotorii@hirosima-u.ac.jp

1 概要

The classification and distinction of links are classical problems in knot theory, a branch of topology. A link is an embedding of several circles in the 3-sphere. Milnor introduced the concept of link-homotopy on links, which is an equivalence relation generated by ambient isotopy and crossing changes within the same component. Habegger and Lin provided an algorithm to determine whether two links belong to the same link-homotopy class. However, its explicit computations had not been given. In this talk, we simplify it using clasper theory and provide them for the 4- and 5-component links.

2 導入

本講演は、論文 [1] に基づいたものである。絡み目とは有限個の円周の埋め込みである。ここでは、絡み目には向きが定められていて、成分は番号付けされているとする。絡み目に対する同値関係として、絡み目ホモトピーと呼ばれる通常同値関係 (アイソトピー) より弱い同値関係が 1954 年に Milnor [2] により定義され、この同値類に関する分類問題や判別問題が研究されてきた。1990 年には Habegger-Lin [3] により、任意の成分数に対して判別問題を解決するアルゴリズムが与えられている。つまり、与えられた 2 つの絡み目に対して、それらが絡み目ホモトピックであるかどうかを判定するアルゴリズムが与えられた。しかし、このアルゴリズムを実行する為に必要な具体的な計算はなされていなかった。[1] ではこれらを計算することによって、5 成分以下の絡み目の判定アルゴリズムを計算可能にし、その具体例を与えた。

3 絡み目の絡み目ホモトピー

2 つの絡み目が絡み目ホモトピックであるとは、一方の絡み目がもう一方の絡み目に通常同値関係 (アイソトピー) と自己交差交換によって生成される同値関係によって関係付けられることである。絡み目の自己交差交換とは同じ成分同士の間で交差交換のことである。絡み目ホモトピーとは、ホモトピーに制約を課したものであり、絡み目ホモトピー類は成分間の絡みに着目した同値関係であると言える。

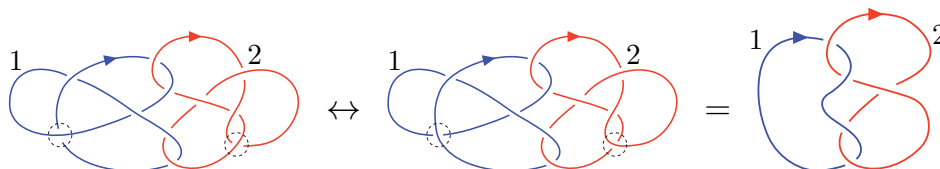


図 1. 絡み目ホモトピー

4 マルコフ型定理と絡み目の絡み目ホモトピー類の判定アルゴリズム

Habegger-Lin [3] は絡み目の絡み目ホモトピー類を代数的に扱うため、純組紐の一般化となるストリング絡み目と呼ばれる概念を導入し、ストリング絡み目の絡み目ホモトピー類全体の集合が群構造を持ち、完全に分類できることを示した。さらに、絡み目の絡み目ホモトピー類全体の集合は、ストリング絡み目の絡み目ホモトピー類全体の集合をある群作用によって割った集合と一対一対応することを示した (マルコフ型定理)。この定理を用いることで、Habegger-Lin[3] は絡み目の絡み目ホモトピー類の判定アルゴリズムを構成している。

5 作用の計算

論文 [1] では、Habegger-Lin [3] と Hughes [4] により与えられた群作用の生成元の計算を、葉廣 [5] によって定義されたクラスパー計算という手法を用いて行なった。ストリング絡み目の標準形がクラスパーを用いて一意的に表せる、という Meilhan-安原による定理 [6, 7] を用いることで、この標準形を用いた作用の計算を行なった。

謝辞 本研究は科研費 (課題番号 : 20K14322) の助成を受けたものである。また、本研究の一部は World Premier International Research Center Initiative program, International Institute for Sustainability with Knotted Chiral Meta Matter (WPI-SKCM²) の援助を受けたものである。 ..

参考文献

- [1] Y. Kotorii and A. Mizusawa Clasper presentations of Habegger-Lin’ s action on string links, Experimental Mathematics, Published online: 09 Oct 2024.
- [2] J. Milnor. Link groups. Ann. Math. (2) 59: 177–195 (1954).
- [3] N. Habegger and X.S. Lin, The classification of links up to link-homotopy, J. Amer. Math. Soc. 3:2 (1990), 389–419.
- [4] J. R. Hughes, Partial conjugations suffice, Topology Appl. 148 (2005), 55–62.
- [5] K. Habiro, Claspers and finite type invariants of links, Geom. Topol. 4 (2000), 1–83.
- [6] A. Yasuhara, Self delta-equivalence for links whose Milnor’ s isotopy invariants vanish., Trans. Amer. Math. Soc. 361 (2009), 4721–4749.
- [7] J.B. Meilhan and A. Yasuhara, Milnor invariants and the HOMFLYPT Polynomial., Geom. Topol. 16 (2012), 889–917.